Logiki wielowartościowe

dr Piotr Szczuko

Wprowadzenie

- Logika dwuwartościowa (boolowska):
  - Możliwe wartości prawdziwości:
  - Prawda, Fałsz, True, False
  - 0, 1
  - Tablice prawdy:

A	*B*	*A* AND *B*
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	*B*	*A* OR *B*
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A	NOT *A*
0	1
1	0

Wprowadzenie

- Dwie wartości prawda-fałsz niedostateczne do opisania przypadków rzeczywistych:
  - Niewiedzy na temat wartości prawdziwości
  - Niepewności odnośnie wartości prawdziwości

Logika wielowartościowa

- Przykład: logika układów elektronicznych (symulacje VHDL)
  - **„1”** - Stan wysoki, TRUE.
  - **„0”** - Stan niski, FALSE.
  - **„X”** - konflikt
  - **„U”** - nieznana („Unknown”)
  - **„-”** - nieistotna
  - **„Z”** - wysoka impedancja linii nieobciążonej

Logika trójwartościowa

– Możliwe wartości prawdziwości:
  - Prawda, Fałsz, Nieznana, True, False, Unknown
  - 0, 1, 2
  - +1, -1, 0

A	*B*	*A* OR *B*	*A* AND *B*	NOT *A*
True	True	True	True	False
True	Unknown	True	Unknown	False
True	False	True	False	False
Unknown	True	True	Unknown	Unknown
Unknown	Unknown	Unknown	Unknown	Unknown
Unknown	False	Unknown	False	Unknown
False	True	True	False	True
False	Unknown	Unknown	False	True
False	False	False	False	True

Logika trójwartościowa

- Nieznana = Prawda LUB Fałsz
- Prawda LUB (Prawda LUB Fałsz) = Prawda ~~LUB (Prawda LUB Fałsz)~~
- Prawda AND (Prawda LUB Fałsz) = (Prawda LUB Fałsz) = Nieznana

A	***B***	***A* OR *B***	***A* AND *B***	**NOT *A***
True	True	True	True	False
True	**Unknown**	**True**	**Unknown**	**False**
True	False	True	False	False
Unknown	True	True	Unknown	Unknown
Unknown	Unknown	Unknown	Unknown	Unknown
Unknown	False	Unknown	False	Unknown
False	True	True	False	True
False	Unknown	Unknown	False	True
False	False	False	False	True

Powiązania z logiką rozmytą

- Logika dwuwartościowa:
  - Możliwe wartości przynależności $\mu(A)=\{0, 1\}$
- Logika trójwartościowa:
  - Możliwe wartości przynależności $\mu(A)=\{0, 1, x\}$
  - gdzie: $0 < x < 1$
- Logika wielowartościowa:
  - Możliwe wartości przynależności $\mu(A)=\{0, 1, x, y, \ldots\}$
  - gdzie: $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, $0 < z < 1$

Teoria Dempstera-Shafera

- *Teoria funkcji przekonania – Matematyczna Teoria Dowodu*
- model probabilistyczny częściowo wyspecjalizowany, dopuszcza się braki w specyfikacji
- Prawdopodobieństwa z jakimi dane hipotezy można udowodnić na podstawie posiadanej informacji (w modelu Bayesa prawdopodobieństwa prawdziwości tych hipotez)
- Rozróżnienie miedzy **niepewnością** a **niewiedzą**

Teoria Dempstera-Shafera

- Modelowanie niewiedzy, przykład - rzut monetą
- **klasyczne prawdopodobieństwo**
  - jeżeli *nie mamy żadnej wiedzy* o monecie to przyjmuje się:
    - 0,5 dla orła i 0,5 dla reszki
  - Jeżeli wiemy, że moneta jest jednorodna to przyjmuje się
    - 0,5 dla orła i 0,5 dla reszki
  - W obu przypadkach dochodzi się do tych samych wniosków
- **teoria Dempstera-Shafera**
  - jeżeli *nie mamy żadnej wiedzy* o monecie to przyjmuje się:
    - **0 dla orła i 0 dla reszki**
  - Jeżeli wiemy, że moneta jest jednorodna to przyjmuje się
    - 0,5 dla orła i 0,5 dla reszki
  - Rozróżnienie przypadków

Teoria Dempstera-Shafera

- Modelowanie niewiedzy, przykład - rzut monetą
- **teoria Dempstera-Shafera**
  - jeżeli *nie mamy żadnej wiedzy* o monecie to przyjmuje się:
    - ***p* orła i 1-*p* dla reszki**
    - *p* jest równomiernie rozmieszczone w przedziale [0,1]
  - Jeżeli wiemy, że moneta jest jednorodna to przyjmuje się
    - *p*=0,5 dla orła z prawdopodobieństwem 1
    - *p*=0,5 dla reszki z prawdopodobieństwem 1

Notacja

- X zbiór wszystkich rozważanych zdań, o których posiadamy jakieś informacje
- $X=\{a, b\}$
- 2^X zbiór potęgowy, zbiór podzbiorów X
- $2^X=\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
- $m()$ Rozkład bazowego prawdopodobieństwa
  - $m: 2^X \to [0,1]$
  - $m(\emptyset)=0$
- $\sum_{A \in 2^X} m(A)=1$, np.:
  - $m(\emptyset)+ m(\{a\})+ m(\{b\})+ m(\{a,b\})=1$
  - 0 +0,2 +0,4 +0,4 =1

Rozkład bazowego prawdopodobieństwa

- m: $2^X \rightarrow [0,1]$
- $m(false) = 0$,
- $m(true) = 1$,
- Jeśli: $(a \Rightarrow b) = true$, to: $m(a) \leq m(b)$
  gdyż b może być prawdziwe w większej liczbie przypadków niż a, tj.:
  - $a \Rightarrow b = true$
  - $0 \Rightarrow 1 = true$
  - $1 \Rightarrow 1 = true$

Rozkład bazowego prawdopodobieństwa

- *m*(*A*) oznacza miarę wszystkich ważnych i dostępnych dowodów poświadczających, że stan analizowanego zagadnienia należy do zbioru *A* (nie do konkretnego podzbioru *A*)
- *m*(*A*) dotyczy **wyłącznie** zbioru *A*, nie pozwala wysnuwać wniosków co do podzbiorów *A*, które posiadają swoje własne wartości *m*()

Funkcje przekonania - *Belief* i wiarygodności – *Plausability*

- Klasyczna wartość prawdopodobieństwa P(A) zawiera się w przedziale:
- Bel(A) < P(A) < Pl(A)
  - Przedział przekonania: w przypadku braku wiedzy [0,1], w miarę dodawana wiedzy zawęża się
- $\mathrm{Bel}(A)=\Sigma_{B\subseteq A}\, m(B)$
  - Wiarygodność poszlak na korzyść A
  - Łączne przekonanie o prawdziwości A
- $\mathrm{Pl}(A)= \Sigma_{(B\cap A)\neq\varnothing}\, m(B)$
  - Na ile są silne poszlaki przemawiające przeciwko A
- $\mathrm{Pl}(A)=1 - \mathrm{Bel}(\neg A)$

Przykład

Hypothesis	m	Belief	Plausibility
Null (neither alive nor dead)	0	0	0
Alive	0.2	0.2	0.5
Dead	0.5	0.5	0.8
Either (alive or dead)	0.3	1.0	1.0

Przykład

Hypothesis	m	Belief	Plausibility
Null	0	0	0
Red	0.35	0.35	0.56
White	0.25	0.25	0.45
Blue	0.15	0.15	0.34
Red or white	0.06	0.66	0.85
Red or blue	0.05	0.55	0.75
White or blue	0.04	0.44	0.65
Any	0.1	1.0	1.0

Aktualizacja wiedzy
Reguła kombinacji Dempstera

- Łączenie przesłanek m_1 i m_2 na temat A:

$$m_3(A) = m_1 \oplus m_2(A) = \frac{\sum_{Y \cap Z = A \neq \emptyset} m_1(Y) m_2(Z)}{1 - \boxed{\sum_{Y \cap Z = \emptyset} m_1(Y) m_2(Z)}}$$

Miara konfliktu między zbiorami K

- Dla dużego konfliktu K, mianownik jest bliski 0, wówczas m_3 zmierza do 1!

Kombinacja przesłanek z konfliktami

- Ekspertyza lekarza L1: chrypa(0.1)+astma(0.9)+zapalenie płuc(0)
- Ekspertyza lekarza L2: chrypa(0.1)+astma(0) +zapalenie płuc(0.9)
- Wynik: chrypa(1) **!!!**

$$m_3(A) = m_1 \oplus m_2(A) = \frac{\sum_{Y \cap Z = A \neq \emptyset} m_1(Y) m_2(Z)}{1 - \sum_{Y \cap Z = \emptyset} m_1(Y) m_2(Z)}$$

Dziękuję za uwagę