Przetwarzanie dźwięków i obrazów

Filtry cyfrowe

część 1:

FILTRY FIR

Opracowanie: Grzegorz Szwoch

Politechnika Gdańska, Katedra Systemów Multimedialnych

greg@multimed.org

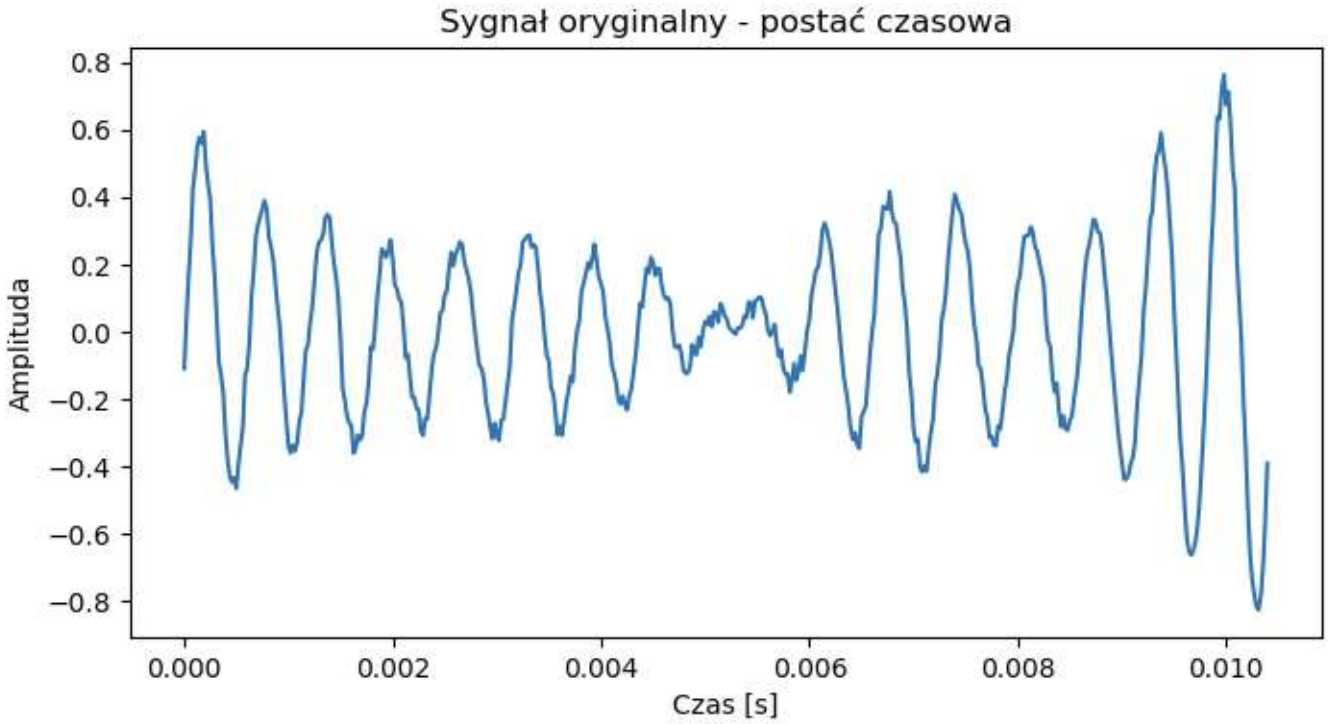
Zanim zaczniemy:

- Celem tego cyklu wykładów jest przedstawienie filtrów cyfrowych od strony praktycznej.
- Jeżeli pojawią się wzory i schematy, to służą one tylko ilustracji – nie uczyć się ich na pamięć!
- Projektowaniem filtrów zajmują się programy komputerowe.
- Ale musimy wiedzieć jakie dane im podać.
- Po zakończeniu cyklu wykładów, student powinien rozumieć: jak działają filtry cyfrowe i jak je zaprojektować.

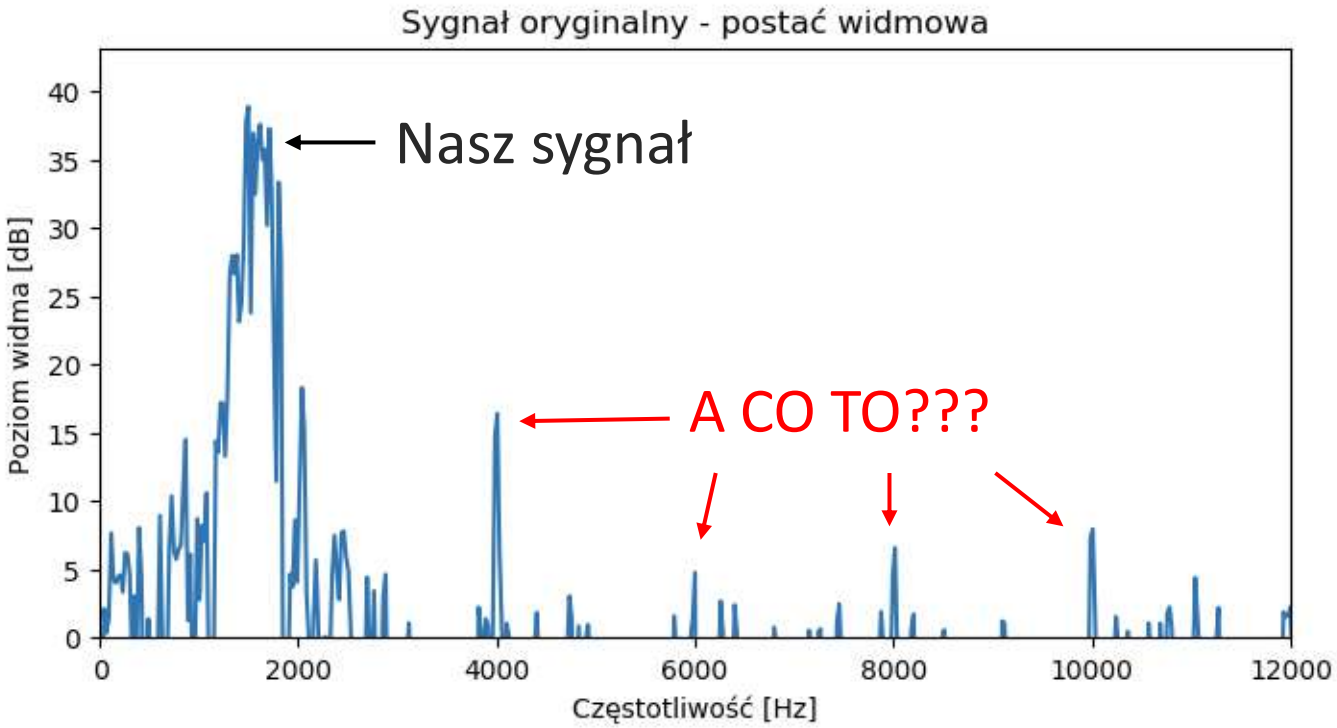
Przykład praktyczny nr 1.

Mamy sygnał z czujnika (może to być dźwięk).

Patrząc na wykres czasowy widzimy, że coś jest nie tak jak trzeba. Ale co?

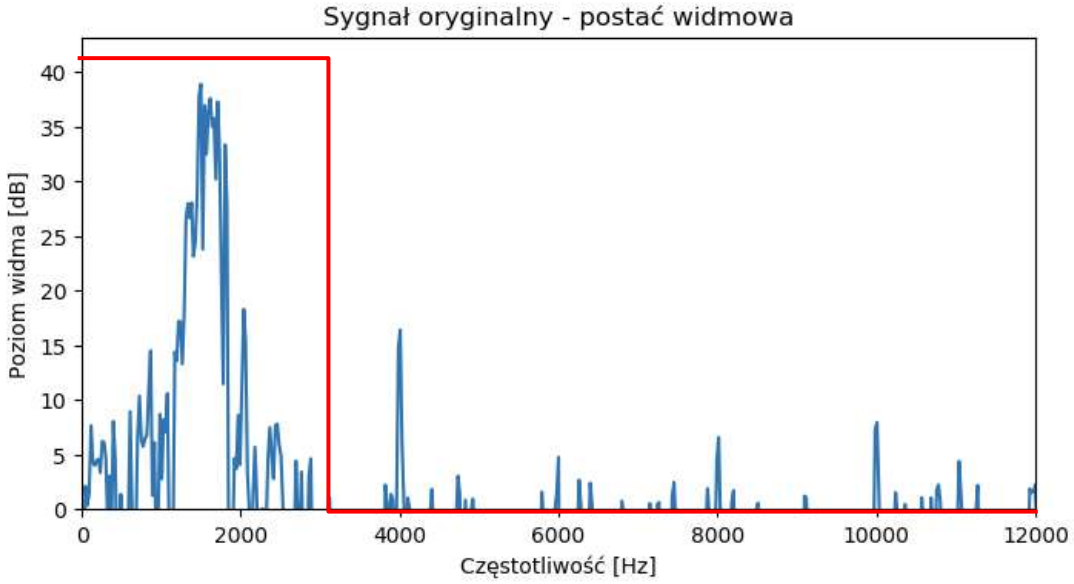


Musimy popatrzeć na widmo sygnału:



Zniekształcenia muszą zostać odfiltrowane z sygnału!

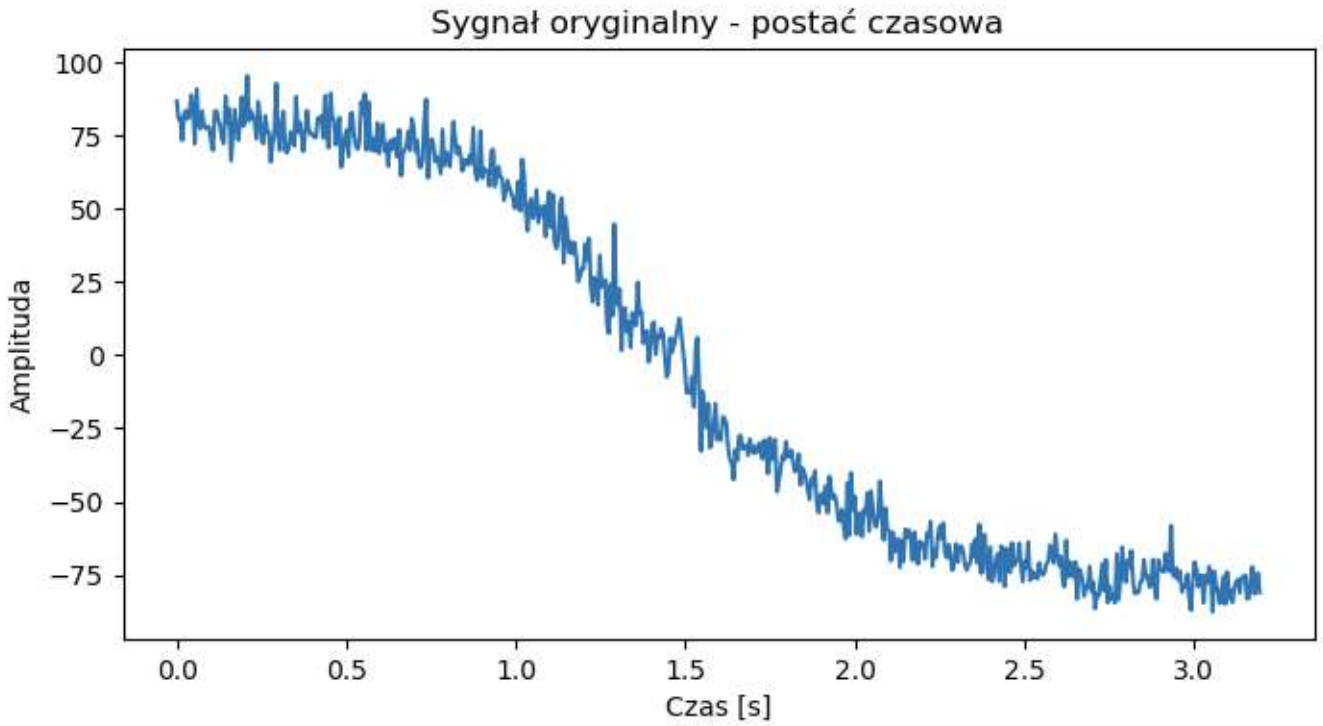
- Filtr cyfrowy jest algorytmem, który usuwa z sygnału niepożądane składowe widmowe.
- Najczęściej filtry działają w dziedzinie częstotliwości:
  - tłumią (filtrują) pewien zakres częstotliwości,
  - przepuszczają pozostałe częstotliwości bez zmian.



Do przykładu nr 1 wrócimy później.

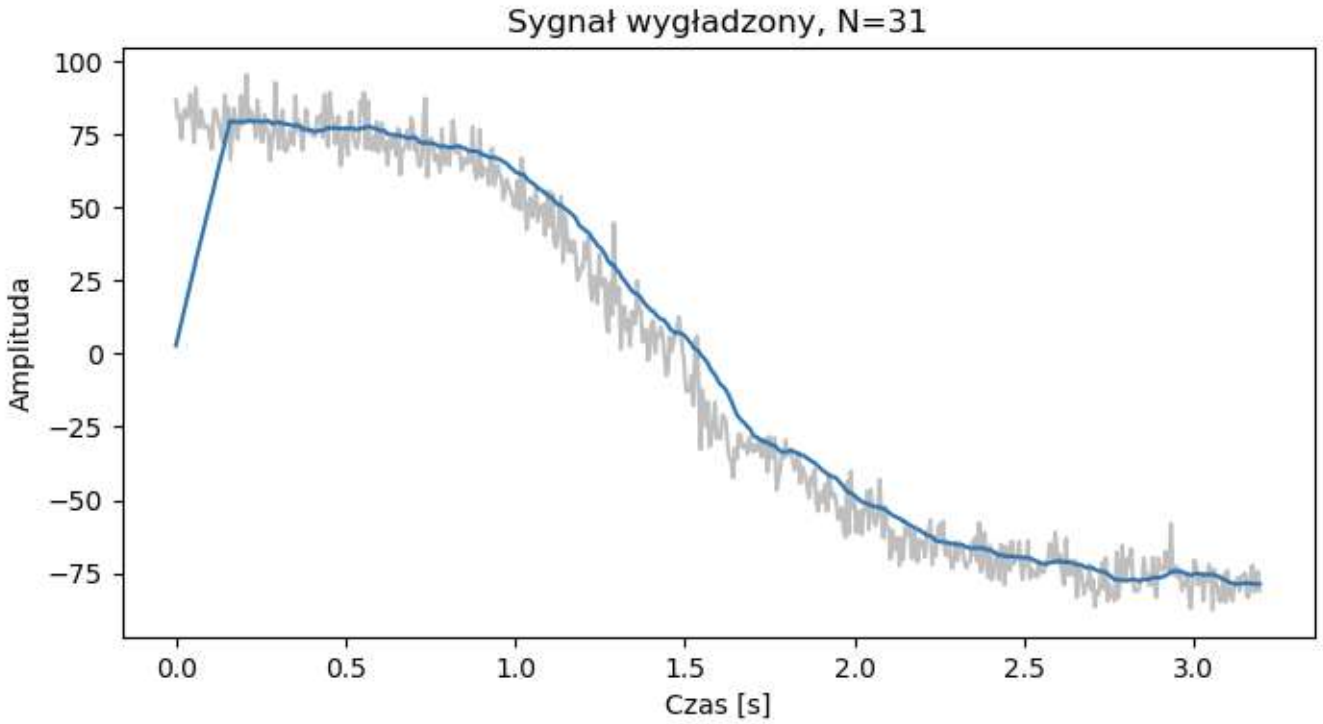
Przykład nr 2.

Zaszumiony sygnał – wymaga wygładzenia.

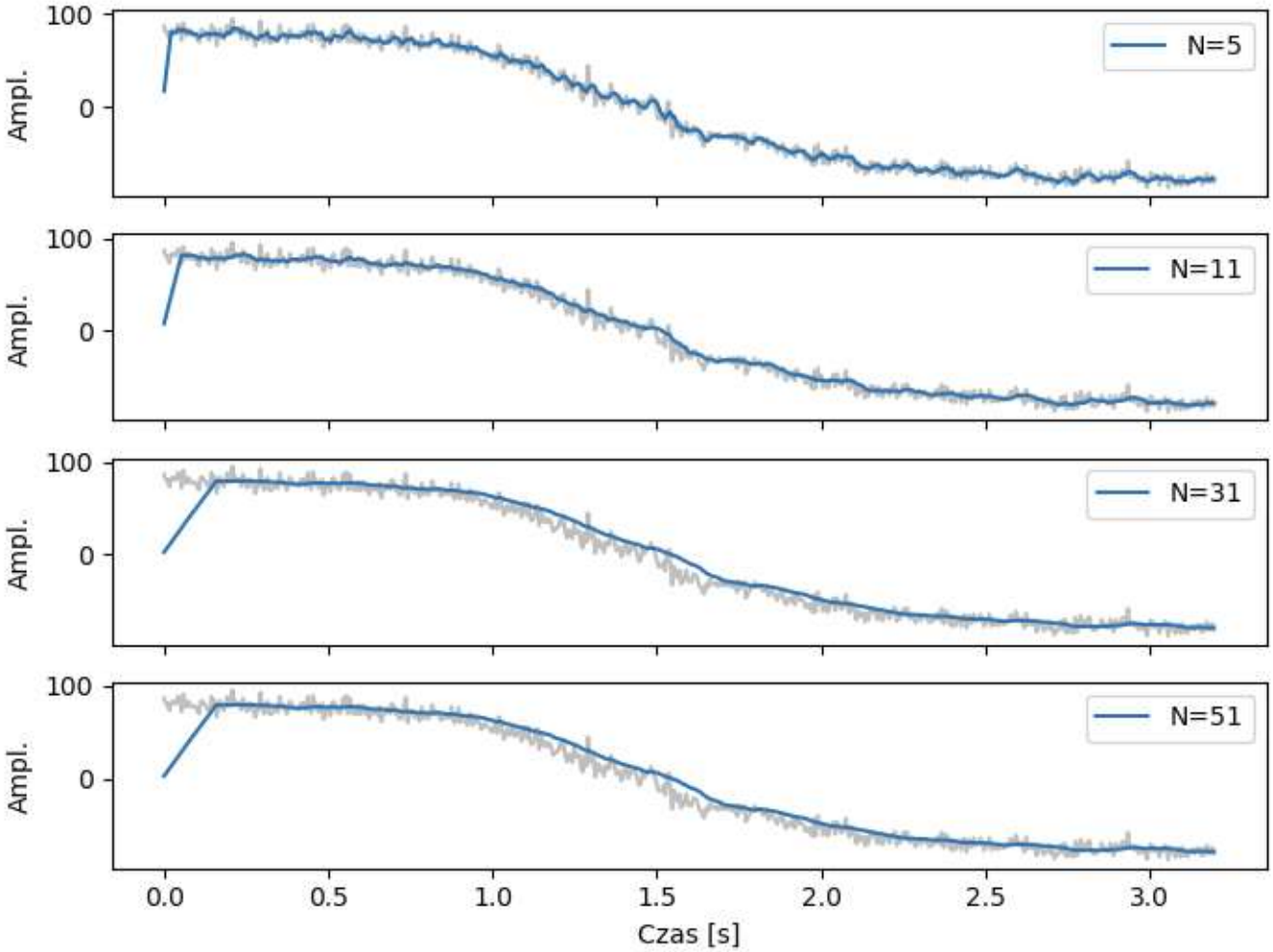


Aby wygładzić sygnał, każdą próbkę zastępujemy średnią z *N* ostatnich próbek sygnału (wliczając bieżącą)

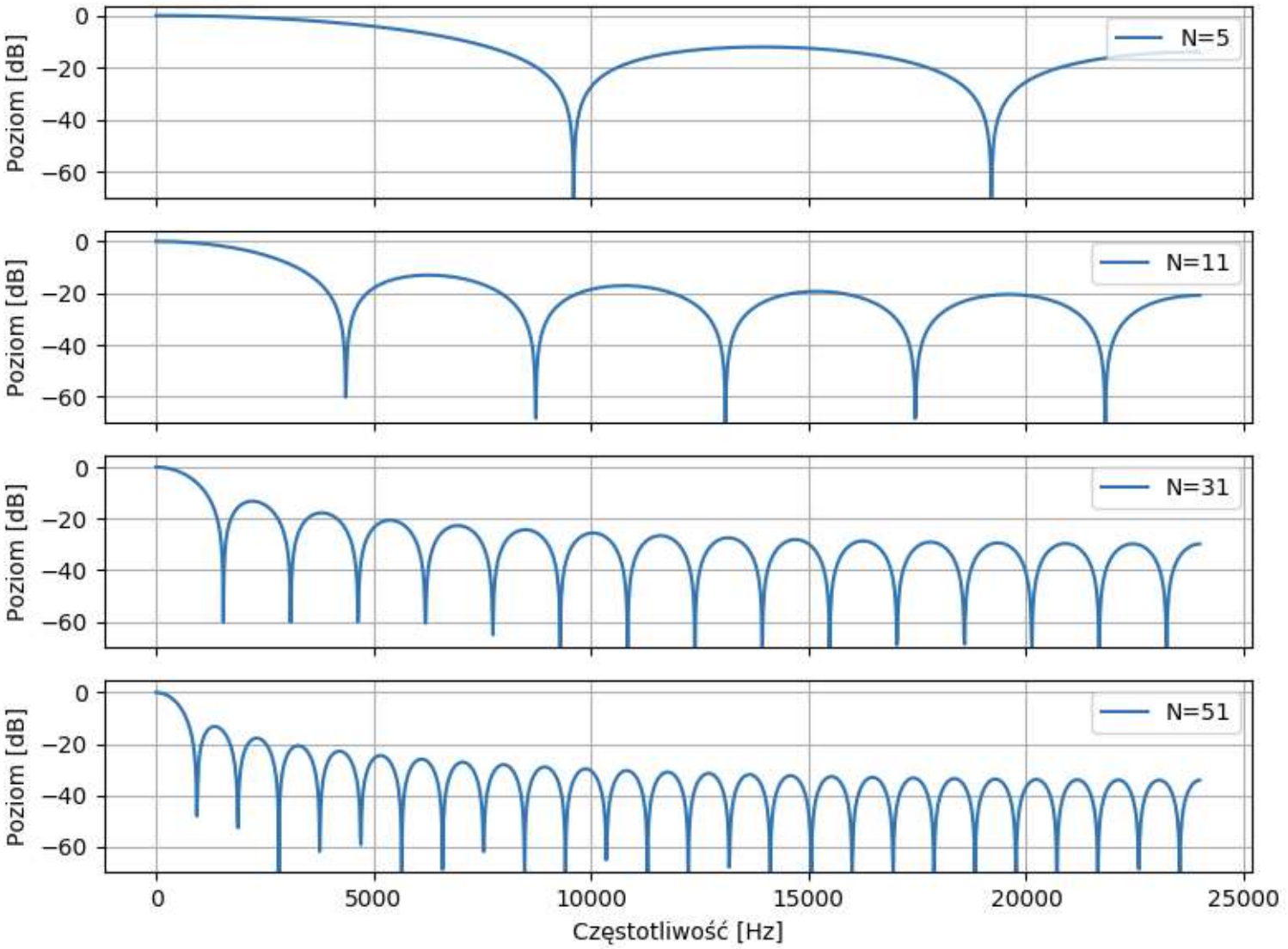
$$y[n] = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x[n-i]$$



Wynik wygładzania dla różnej liczby *N*:



Charakterystyki częstotliwościowe układów wygładzania:



Równanie algorytmu wygładzania:

$$y[n] = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x[n-i]$$

Zapiszmy je inaczej:

$$y[n] = h \cdot x[n] + h \cdot x[n-1] + h \cdot x[n-2] + \ldots + h \cdot x[n-(N-1)]$$

gdzie $h = 1 / N$.

Wartości *N* ostatnich próbek (w tym bieżącej) mnożymy przez współczynnik *h* i dodajemy do siebie.

Jest to filtr średniej ruchomej (*moving average filter, MA*).

Równanie filtru średniej ruchomej:

$$y[n] = h \cdot x[n] + h \cdot x[n-1] + h \cdot x[n-2] + \ldots + h \cdot x[n-(N-1)]$$

Zapiszmy je w sposób bardziej ogólny:

$$y[n] = h_0 \cdot x[n] + h_1 \cdot x[n-1] + h_2 \cdot x[n-2] + \ldots + h_{N-1} \cdot x[n-(N-1)]$$

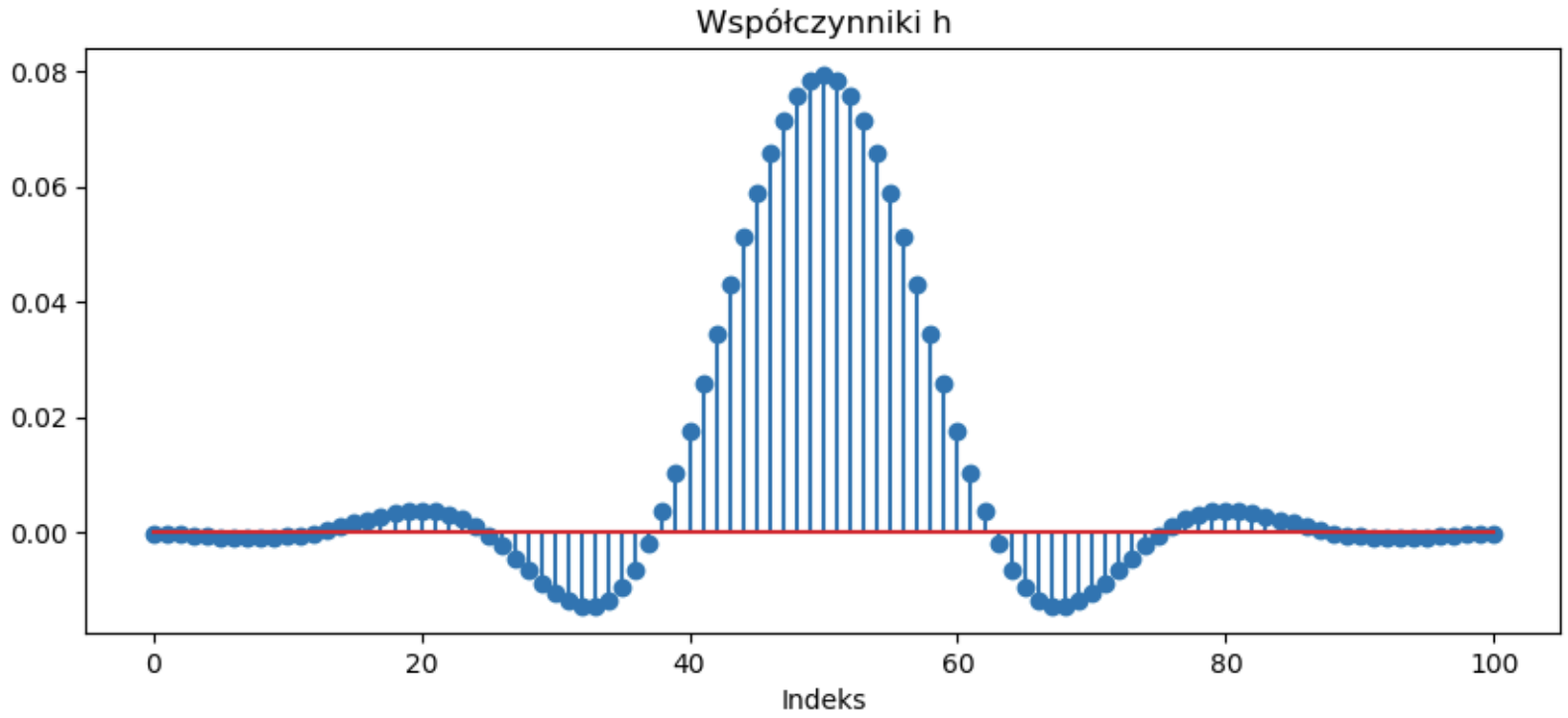
albo krócej:

$$y[n] = \sum_{i=0}^{N-1} \left(h_i \cdot x[n-i] \right)$$

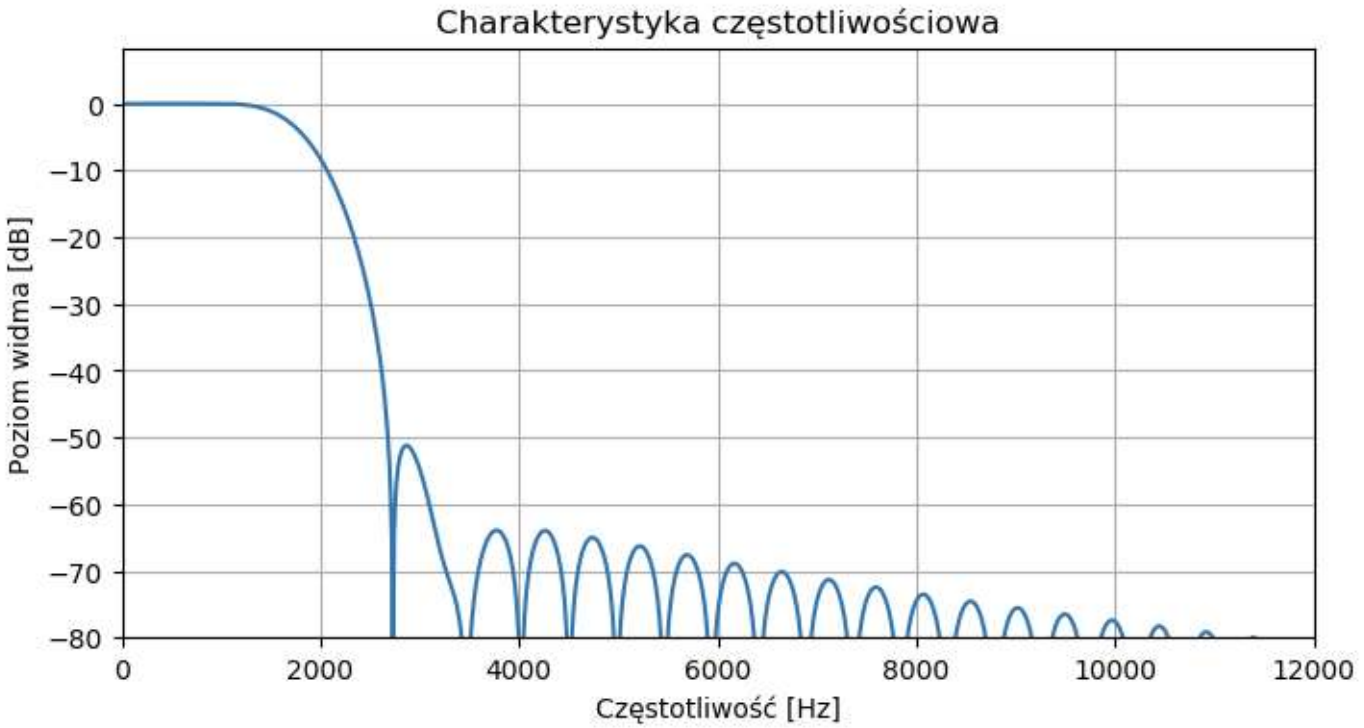
Dla filtru średniej ruchomej:

$h_0 = h_1 = \ldots = h_{N\text{-}1} = 1 / N.$

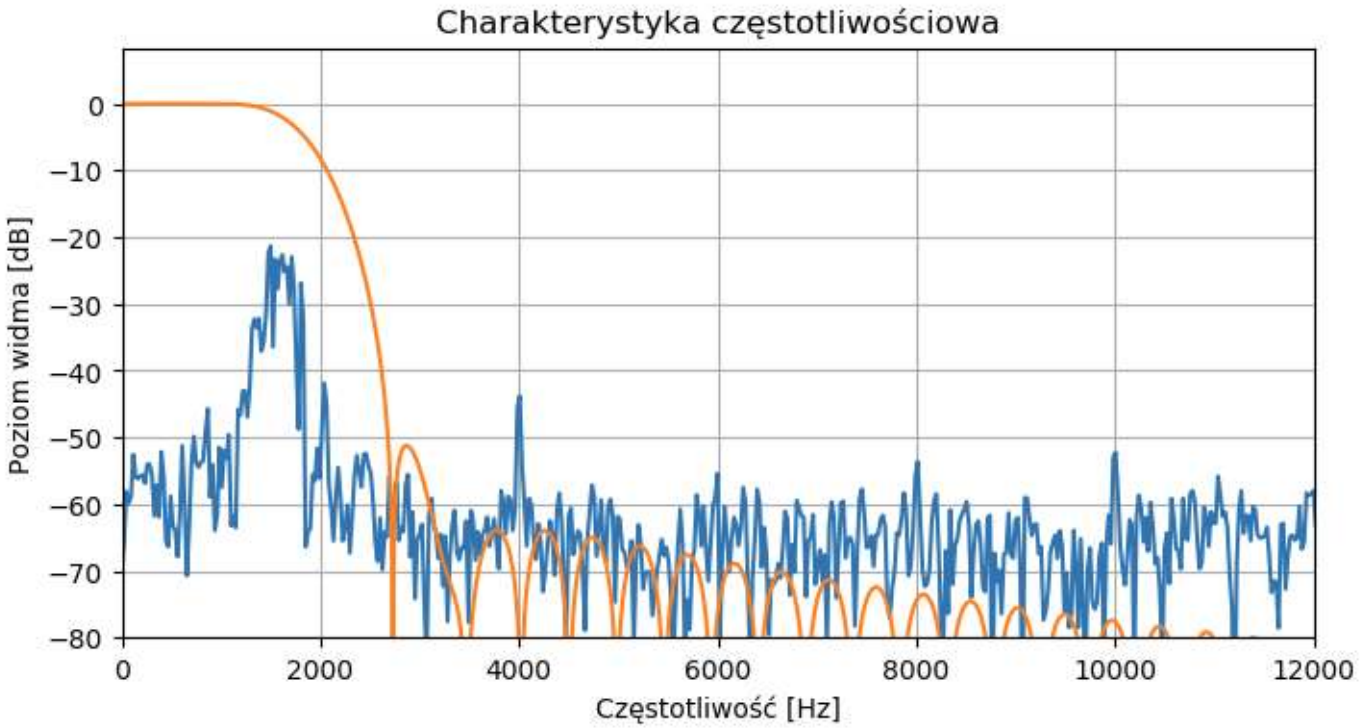
Czyli współczynniki *h* mogą być dowolne.
Na przykład takie (*N* = 101)*:*



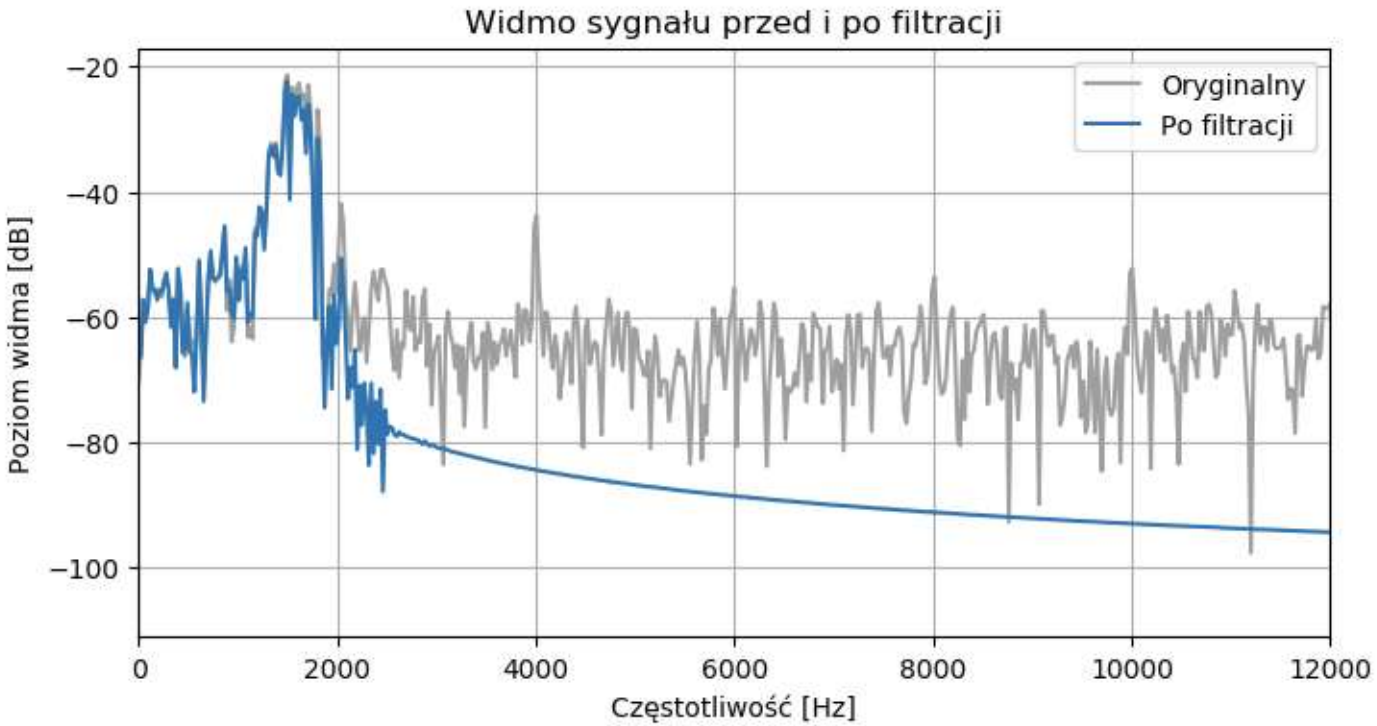
Jak wygląda charakterystyka częstotliwościowa przy takich współczynnikach?



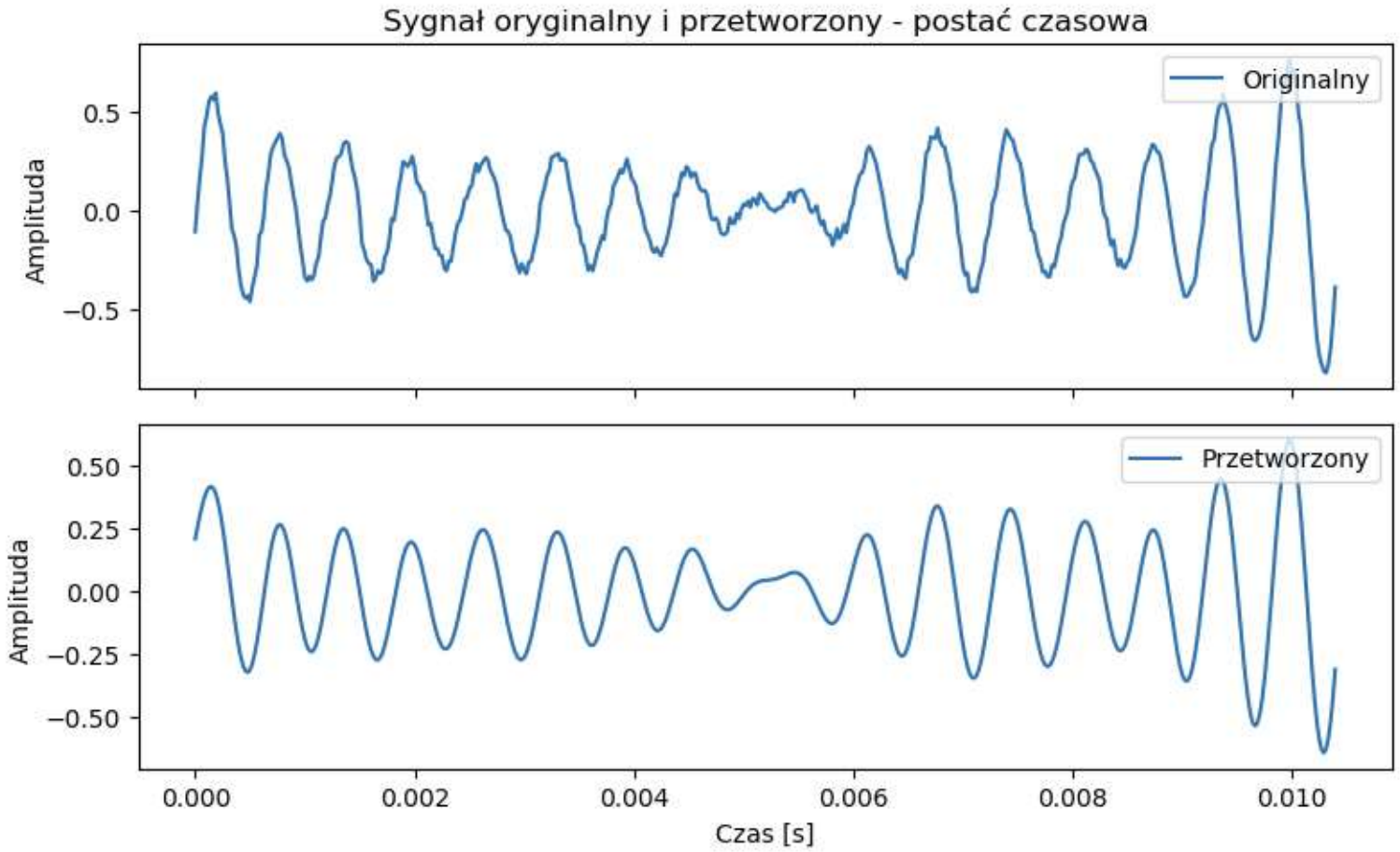
Wracamy do przykładu nr 1.
Czy to nam pomoże usunąć zniekształcenia?



Widmo sygnału oryginalnego oraz po przetworzeniu przez algorytm:



Postać czasowa – przed i po:



Sukces! Zniekształcenia zostały usunięte!

Przepis na obliczenie wyjściowych wartości próbek
- tzw. równanie różnicowe:

$$y[n] = h_0 x[n] + h_1 x[n-1] + h_2 x[n-2] + \ldots + h_{N-1} x[n-(N-1)]$$

$$y[n] = \sum_{i=0}^{N-1} \left(h_i x[n-i] \right)$$

Algorytm realizujący obliczenia według tego równania nazywa się
filtrem cyfrowym o skończonej odpowiedzi impulsowej
(*FIR – finite impulse response filter*).

Co robi filtr FIR:

- bierze *N* ostatnich próbek,
- mnoży je przez współczynniki *h*,
- sumuje wyniki mnożenia,
- wysyła wynik na wyjście.

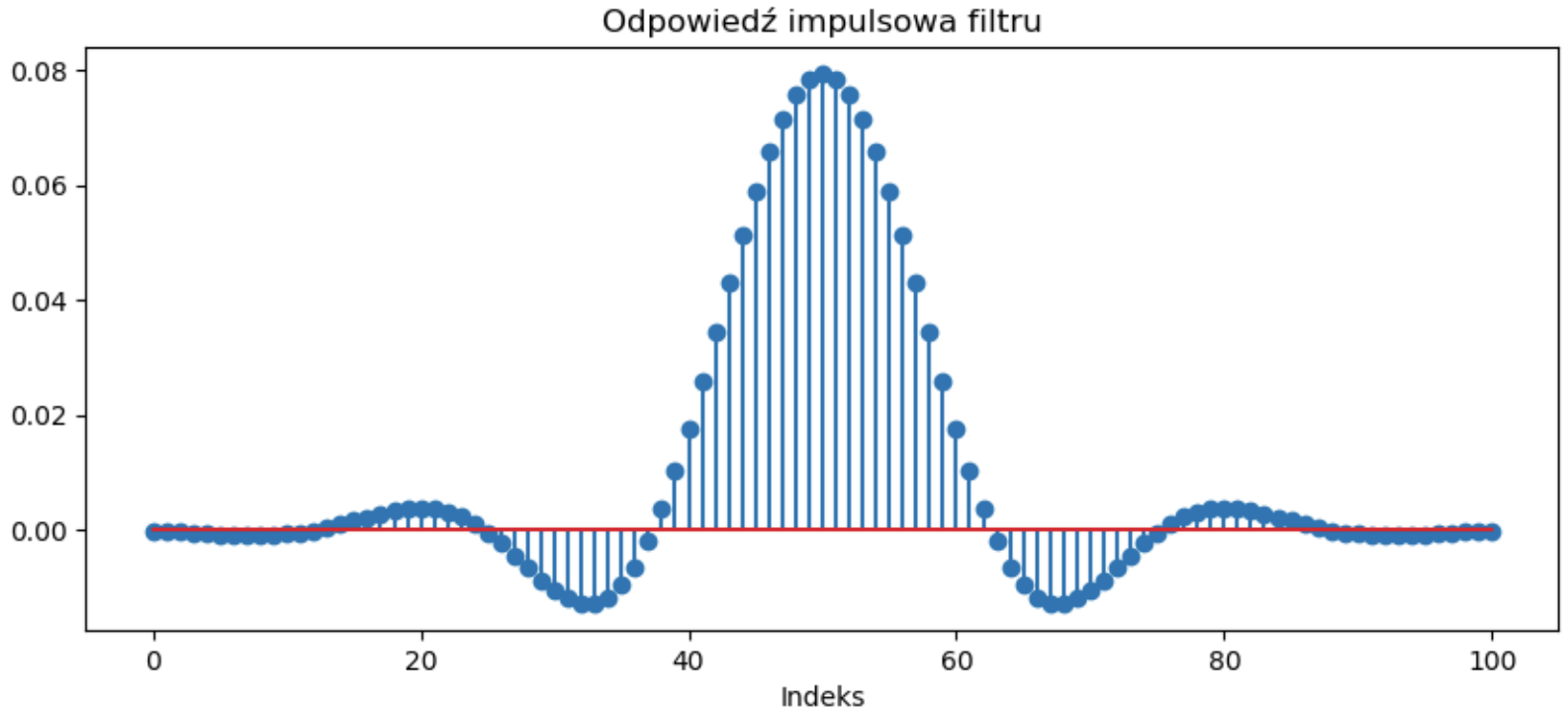
I to naprawdę wszystko!

```
y = 0
FOR i = 0 TO N-1:
      y = y + x[i] * h[i]
RETURN y
```

Odpowiedź impulsowa

filtru FIR na pobudzenie impulsowe $\delta[n]$
jest równa zbiorowi współczynników filtru:

$(h_0, h_1, h_2, \ldots, h_{N-1})$



W dziedzinie zmiennej zespolonej z, opóźnieniu sygnału o jedną próbkę odpowiada z^{-1}.

$$y[n] = h_0 x[n] + h_1 x[n-1] + h_2 x[n-2] + \ldots + h_{N-1} x[n-(N-1)]$$

możemy zapisać jako:

$$H[z] = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \ldots + h_{N-1} z^{-(N-1)}$$

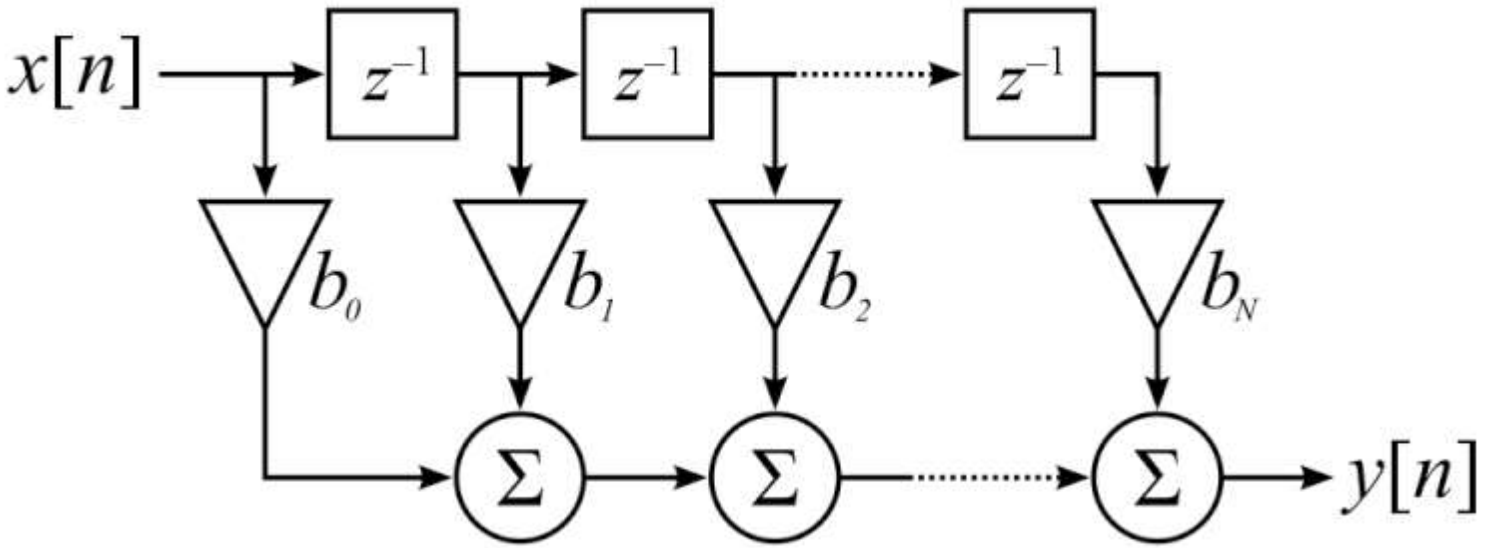
Jest to transmitancja filtru FIR.

Transmitancja jest transformatą Fouriera odpowiedzi impulsowej (czyli zbioru współczynników):

$$\mathrm{H}[z] = \mathscr{F}(h[n])$$

Schemat filtru FIR

(współczynniki oznacza się czasami literą *b*):



Pobieramy sygnał po każdym z^{-1} i mnożymy przez b_i – miejsca te nazywa się „odczepami” (*tap*).

- Długość filtru FIR (*filter length*)
  - liczba współczynników filtru (*N*),
  - czyli długość odpowiedzi impulsowej.
- Rząd filtru FIR (*filter order*)
  - najwyższa potęga w transmitancji,
  - zawsze o 1 mniejsza niż długość filtru (*N*-1) (ponieważ współczynniki numerujemy od zera).

Np. filtr FIR o 51 współczynnikach
ma długość 51 i rząd 50.

Transmitancję filtru można też zapisać w następujący sposób:

$$H(z) = k\left(1 - q_1 z^{-1}\right)\left(1 - q_2 z^{-1}\right)\left(1 - q_3 z^{-1}\right)\ldots\left(1 - q_{N-1} z^{-1}\right)$$

k – stałe wzmocnienie

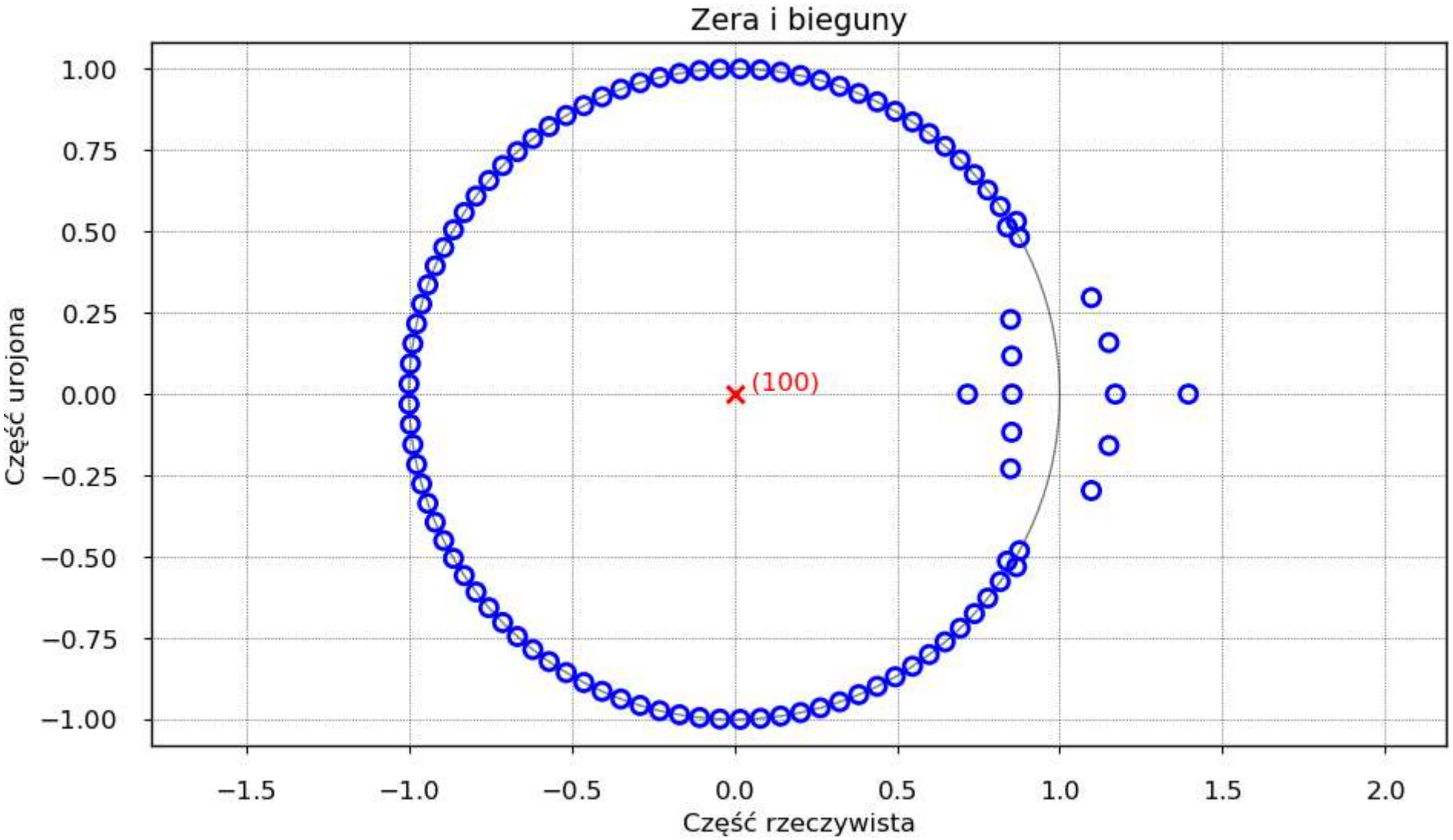
q_i – zera transmitancji

Transmitancja filtru FIR o długości *N* posiada:

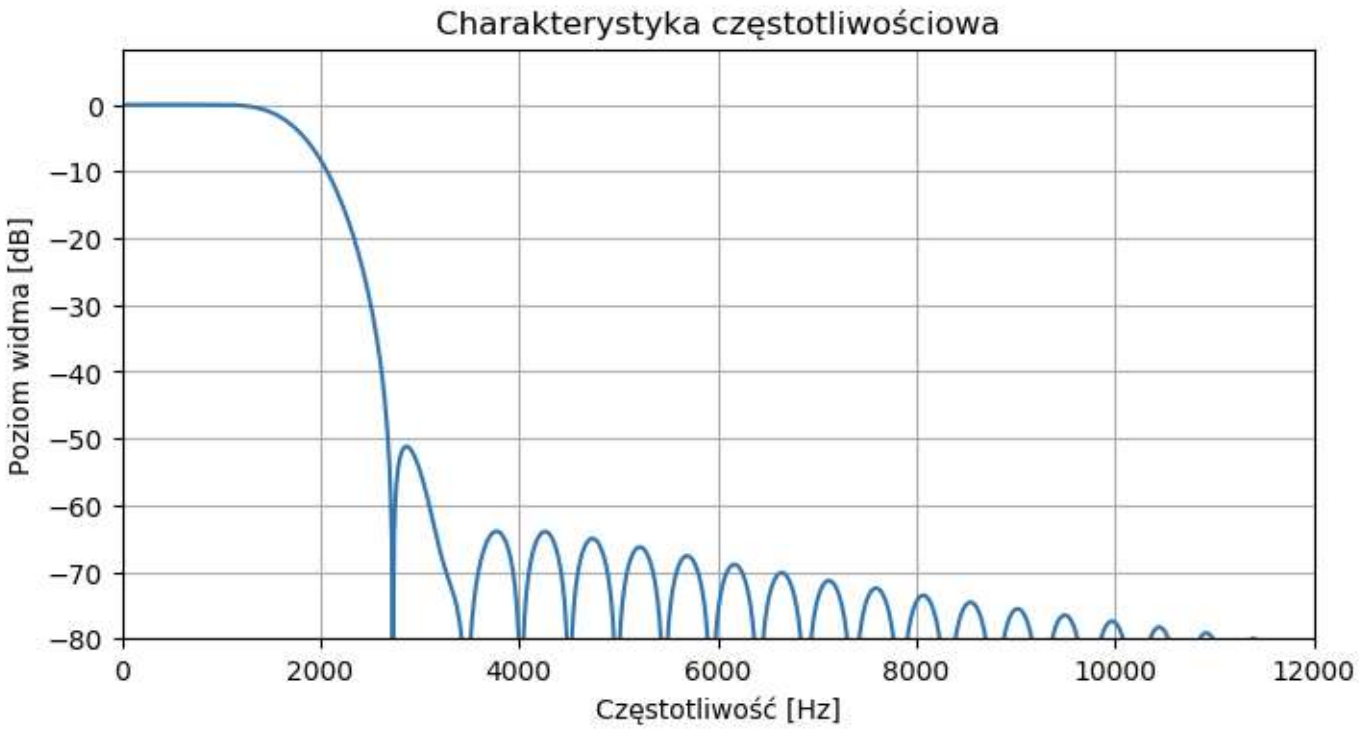
- *N*-1 zer (w parach zespolonych sprzężonych),
- *N*-1 biegunów położonych w punkcie zerowym.

Z tego względu, filtry FIR są zawsze stabilne.

Zera i bieguny transmitancji filtru FIR (N = 101):



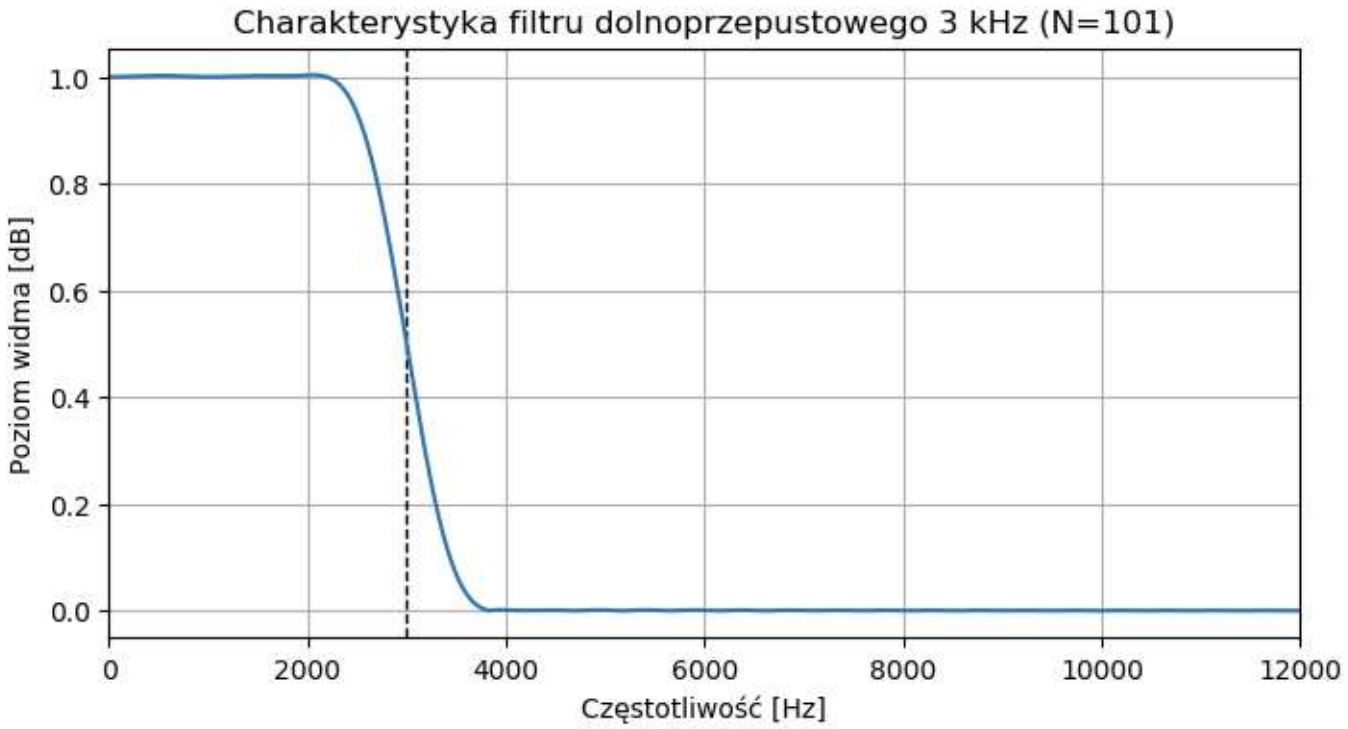
Moduł transmitancji $|H[z]|$ określa charakterystykę amplitudową (częstotliwościową)
– wzmocnienie filtru dla poszczególnych zakresów częstotliwości.



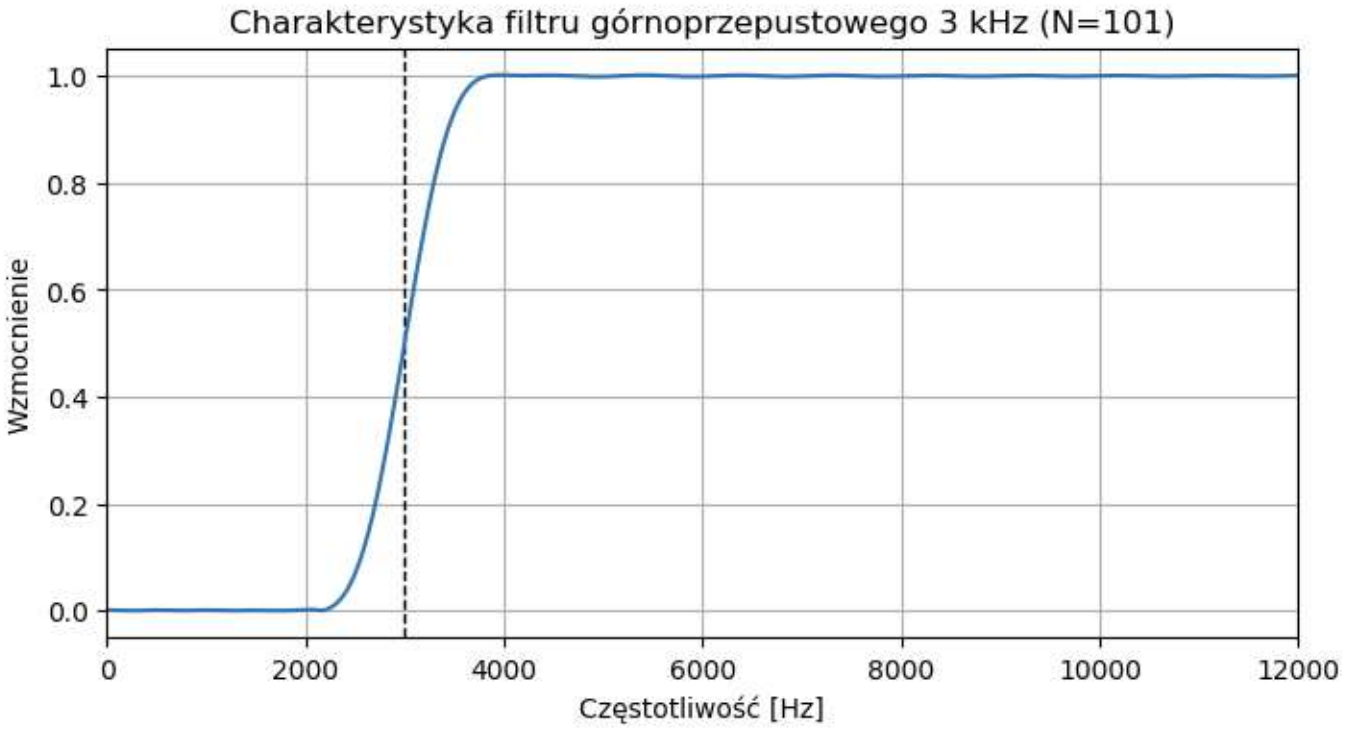
Najczęściej chcemy przepuścić wybrany zakres częstotliwości bez zmiany i stłumić resztę.

- Pasmo przepustowe (*pass band*)
  – wzmocnienie filtru powinno być równe 1, składowe przepuszczane bez zmiany.
- Pasmo zaporowe (*stop band*)
  – wzmocnienie filtru powinno być bliskie 0, składowe są tłumione.
- Częstotliwość graniczna lub odcięcia (*cut-off*)
  – granica między pasmem przepustowym i zaporowym.

Filtr dolnoprzepustowy (DP) – *low-pass* (LP)



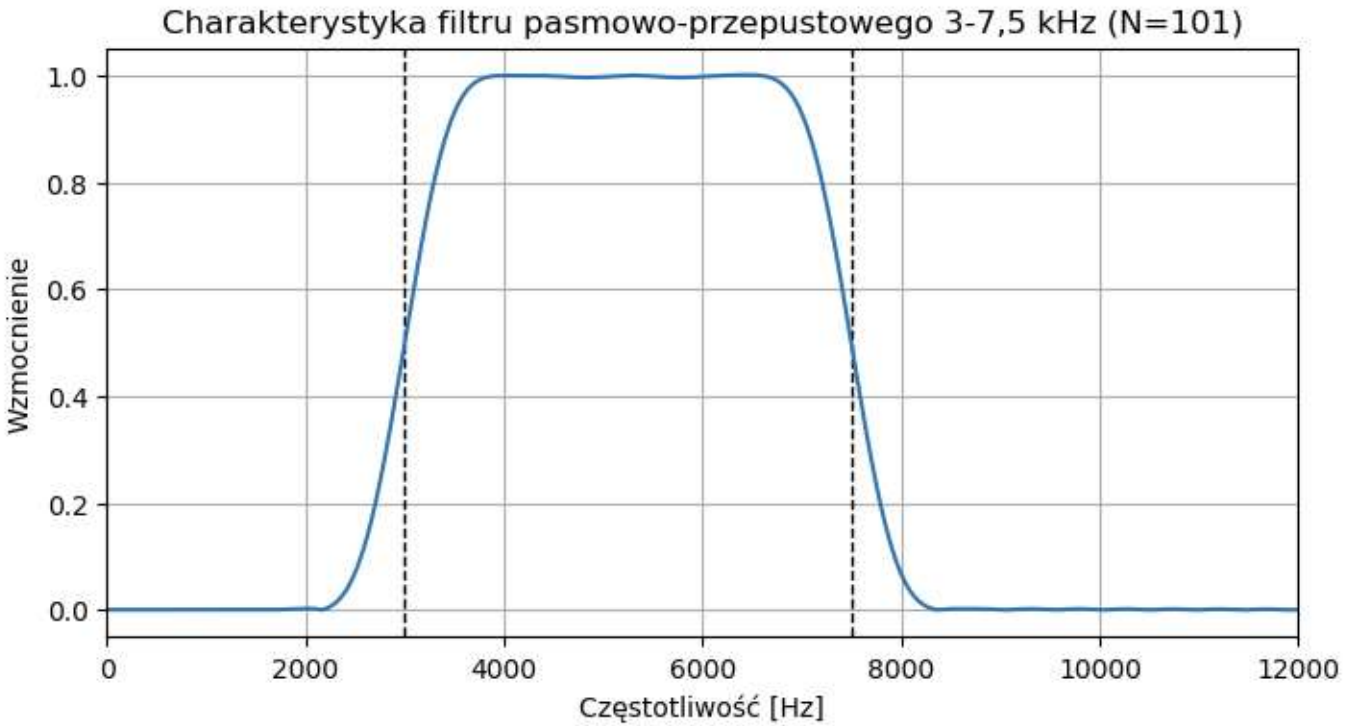
Filtr górnoprzepustowy (GP) – *high-pass* (HP)



W dziedzinie częstotliwości: GP(*f*) = 1 – DP(*f*)

Filtr pasmowo-przepustowy (PP) – *band-pass* (BP)

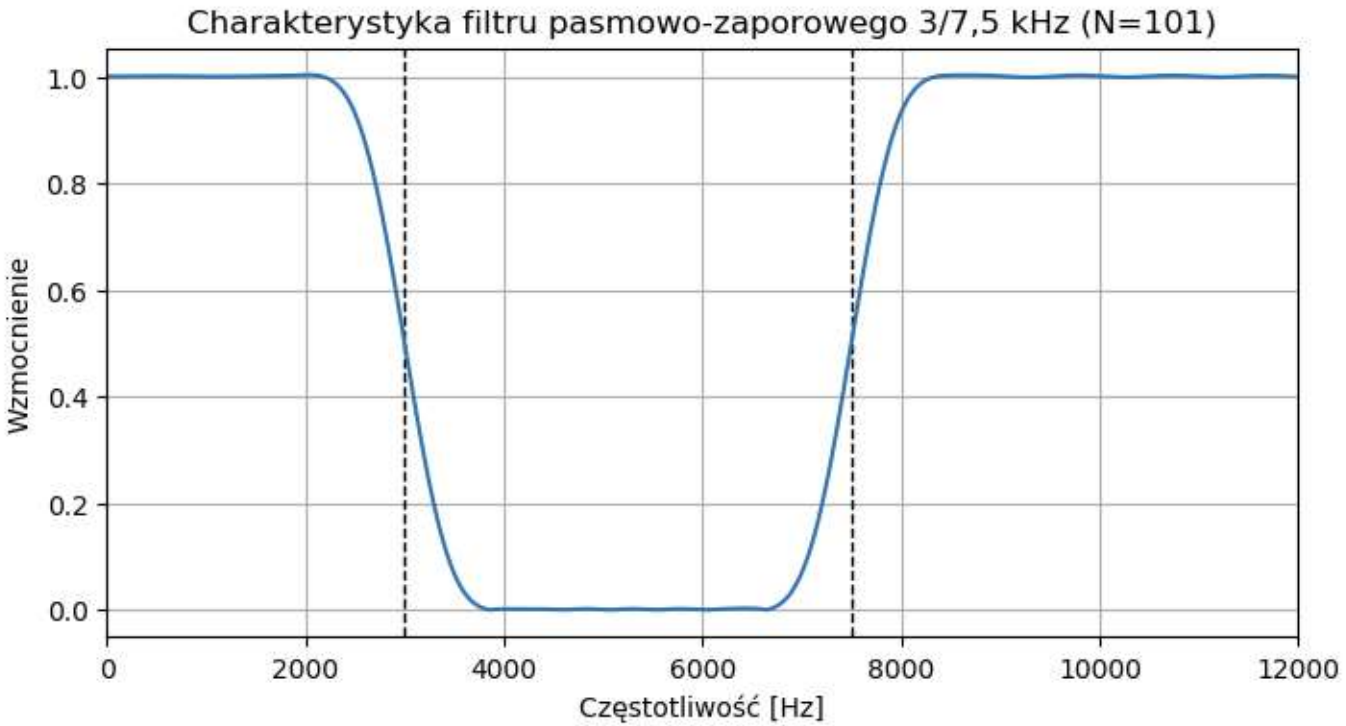
Dwie częstotliwości graniczne – górna i dolna



W dziedzinie częstotliwości: PP(*f*) = DP(*f*) · GP(*f*)

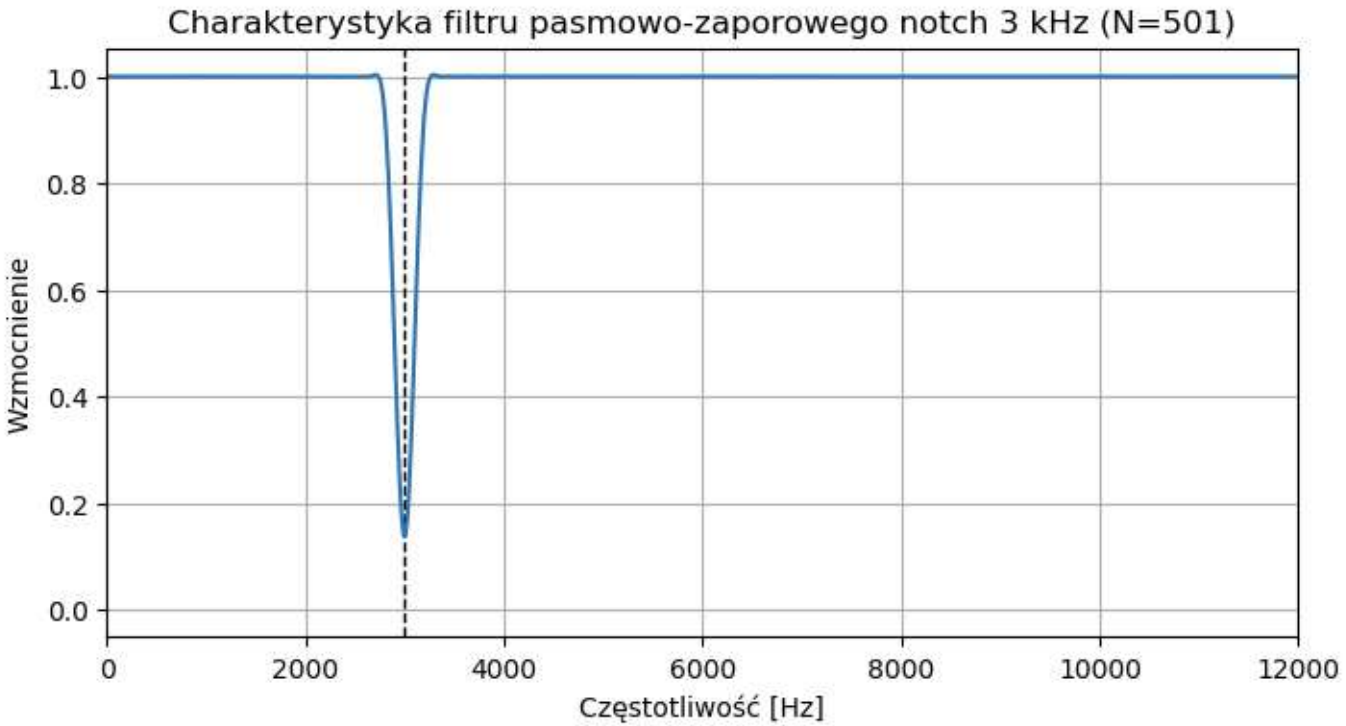
Filtr pasmowo-zaporowy (PZ) – *band-stop* (BS)

Dwie częstotliwości graniczne – górna i dolna



W dziedzinie częstotliwości: PZ(*f*) = DP(*f*) + GP(*f*)

Wąskopasmowy filtr pasmowo-zaporowy –
– *notch filter*

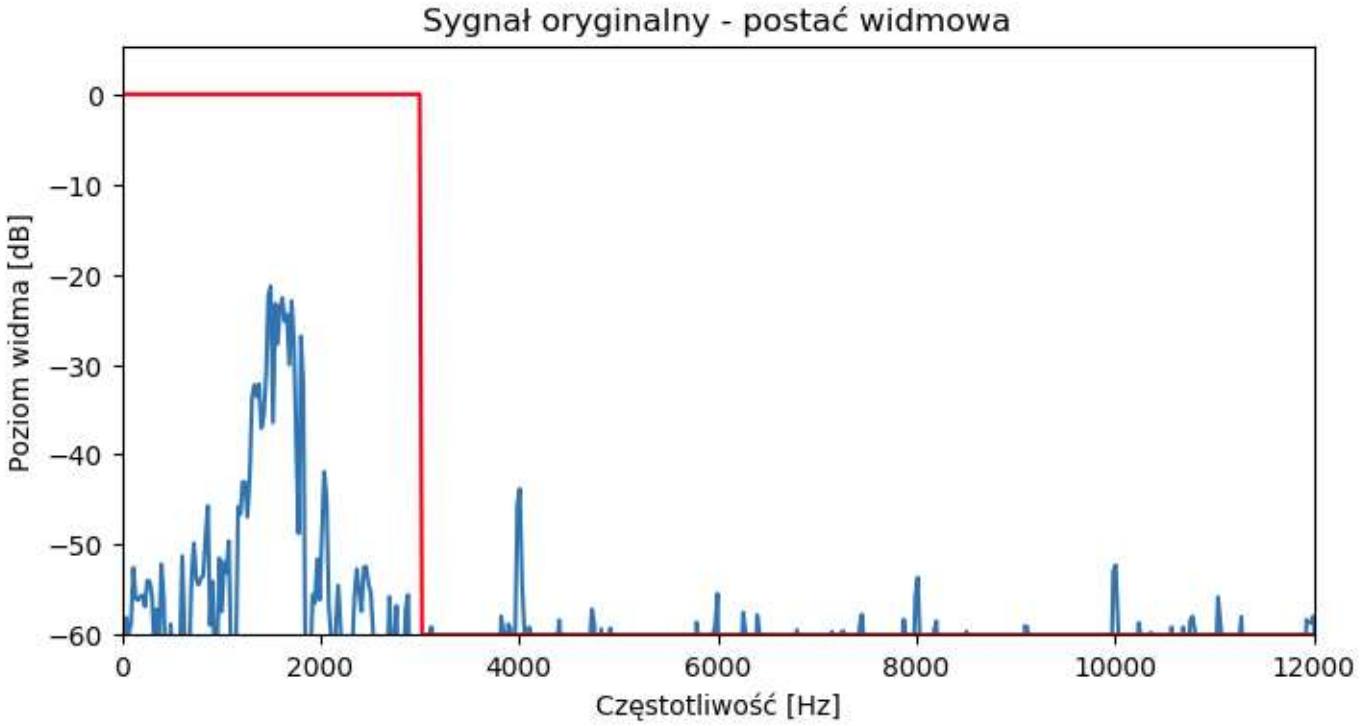


Służy do eliminacji jednej konkretnej częstotliwości.

Projektowanie filtru cyfrowego FIR

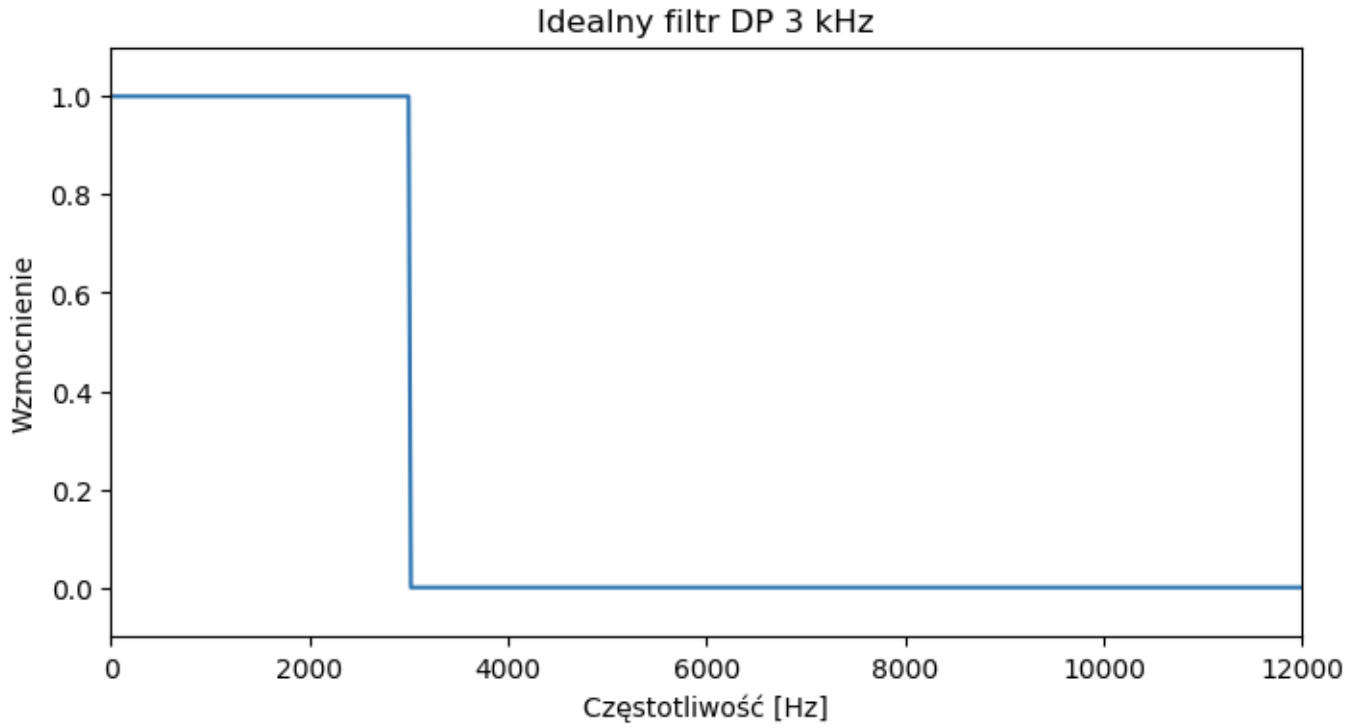
- Decyzja projektanta:
  - jaki typ charakterystyki?
  - jaka długość filtru (ile współczynników)?
  - która metoda projektowania?
- Obliczenie współczynników filtru na podstawie podanych danych – wykonuje program komputerowy.
- Sprawdzenie obliczonych charakterystyk filtru.
- Ocena efektów filtracji, ew. powtórzenie projektu.

Wracamy do przykładu nr 1.



Aby usunąć zniekształcenia, potrzebny jest filtr dolnoprzepustowy o częstotliwości granicznej ok. 3 kHz.

Charakterystyka idealnego filtru DP 3 kHz:



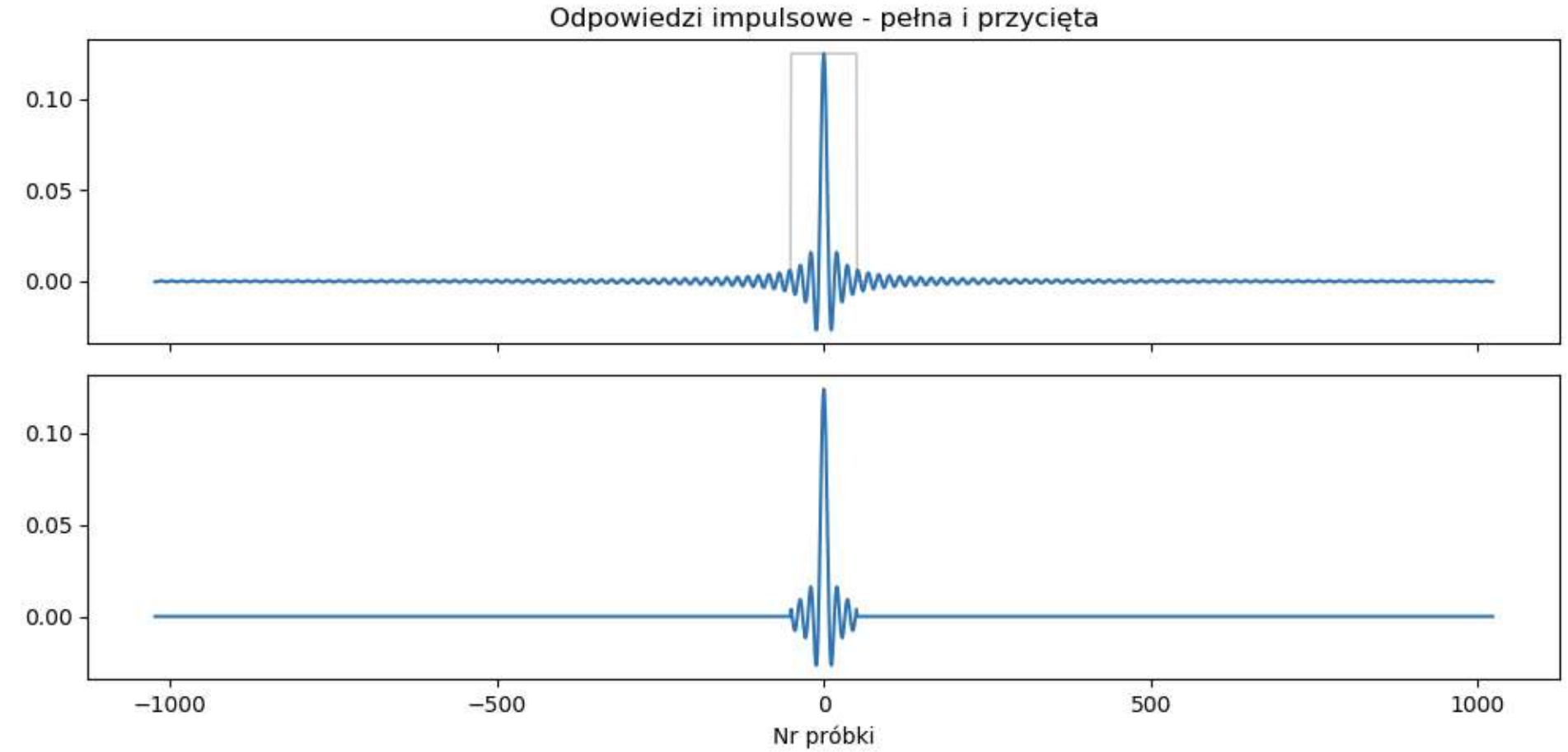
Teoretycznie, powinniśmy móc obliczyć odwrotną transformatę Fouriera, otrzymując współczynniki filtru. Problem rozwiązany?

Dlaczego nie da się zrobić filtru FIR w ten sposób, licząc IFFT idealnej charakterystyki widmowej?

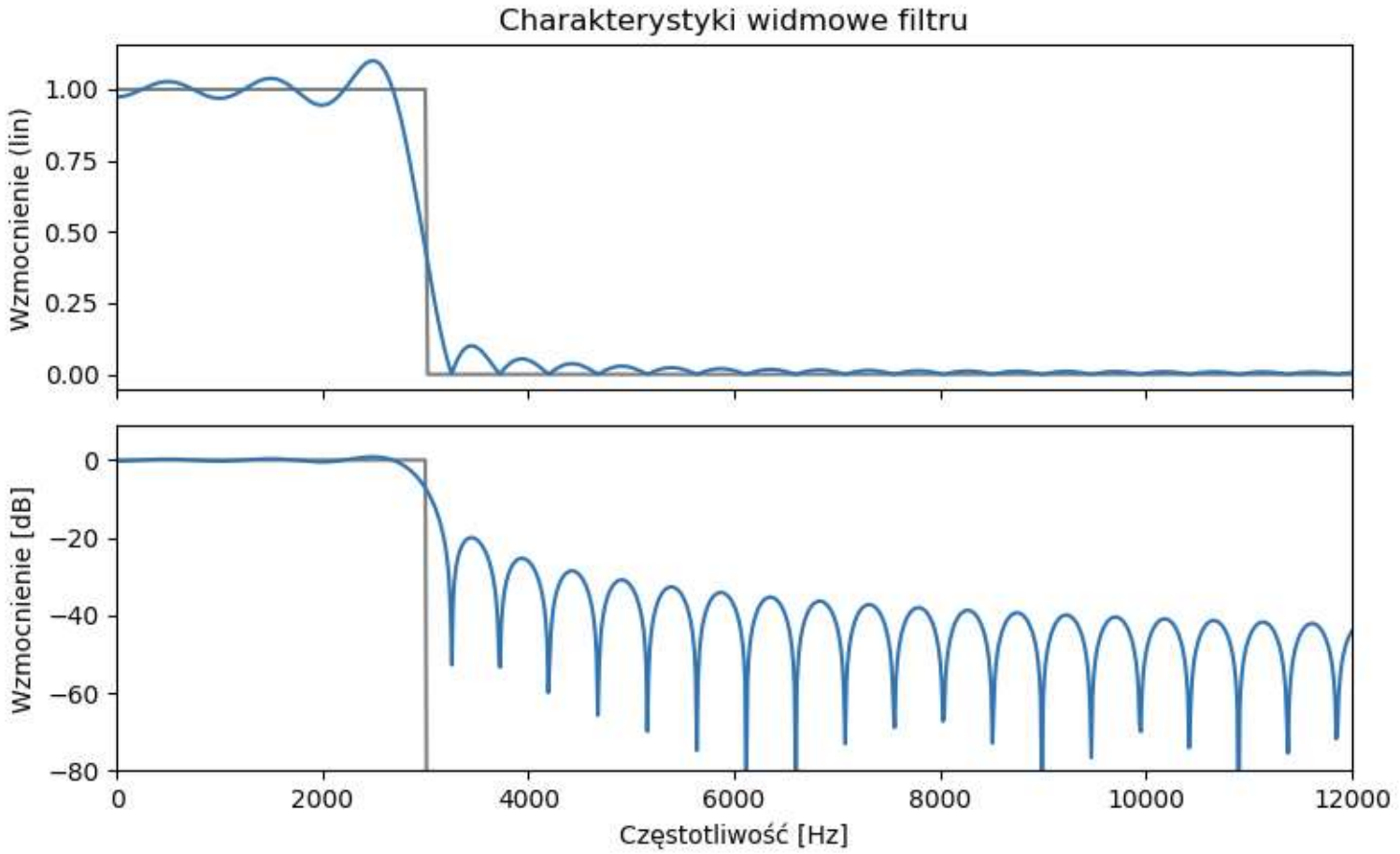
Ponieważ idealny filtr FIR:

1. ma nieskończoną odpowiedź impulsową, czyli $N = \infty$,
2. wymaga znajomości przyszłych próbek sygnału, czyli jest nieprzyczynowy.

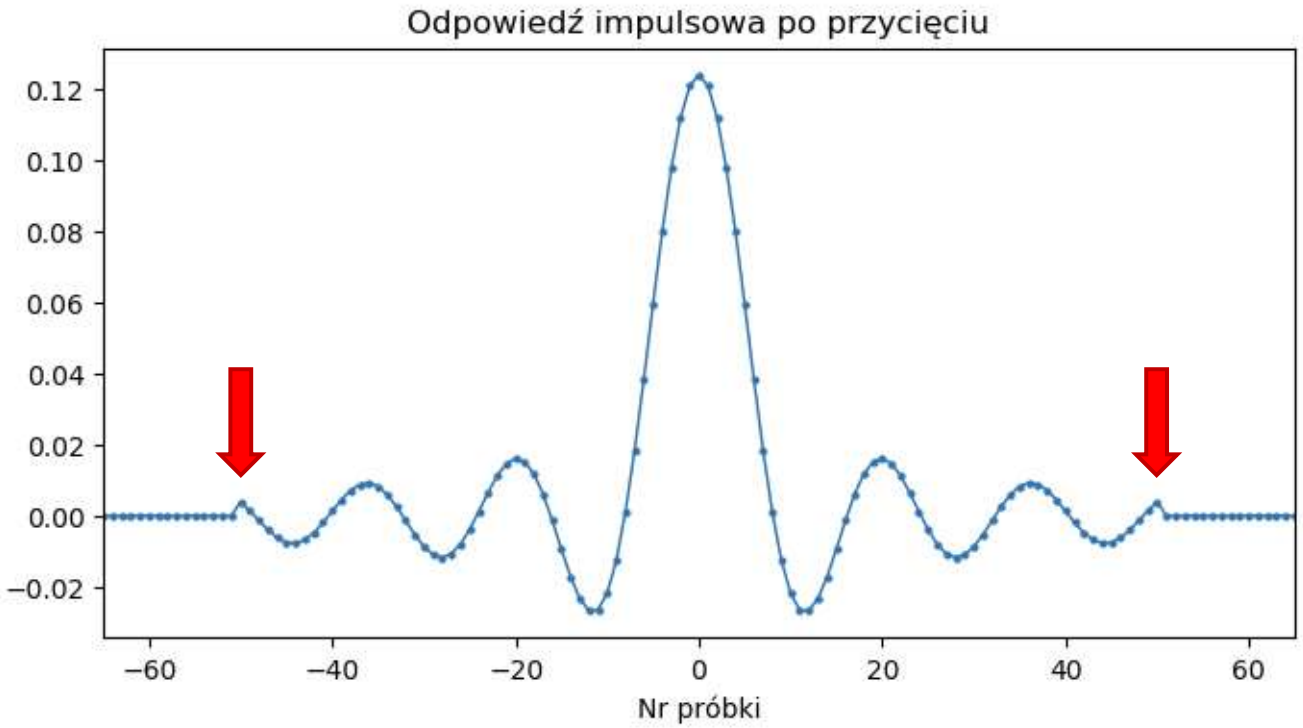
Pierwszy problem ($N = \infty$) możemy rozwiązać przycinając odpowiedź impulsową do ustalonej długości N.



Zniekształcenia na skutek przycięcia odp. impulsowej:



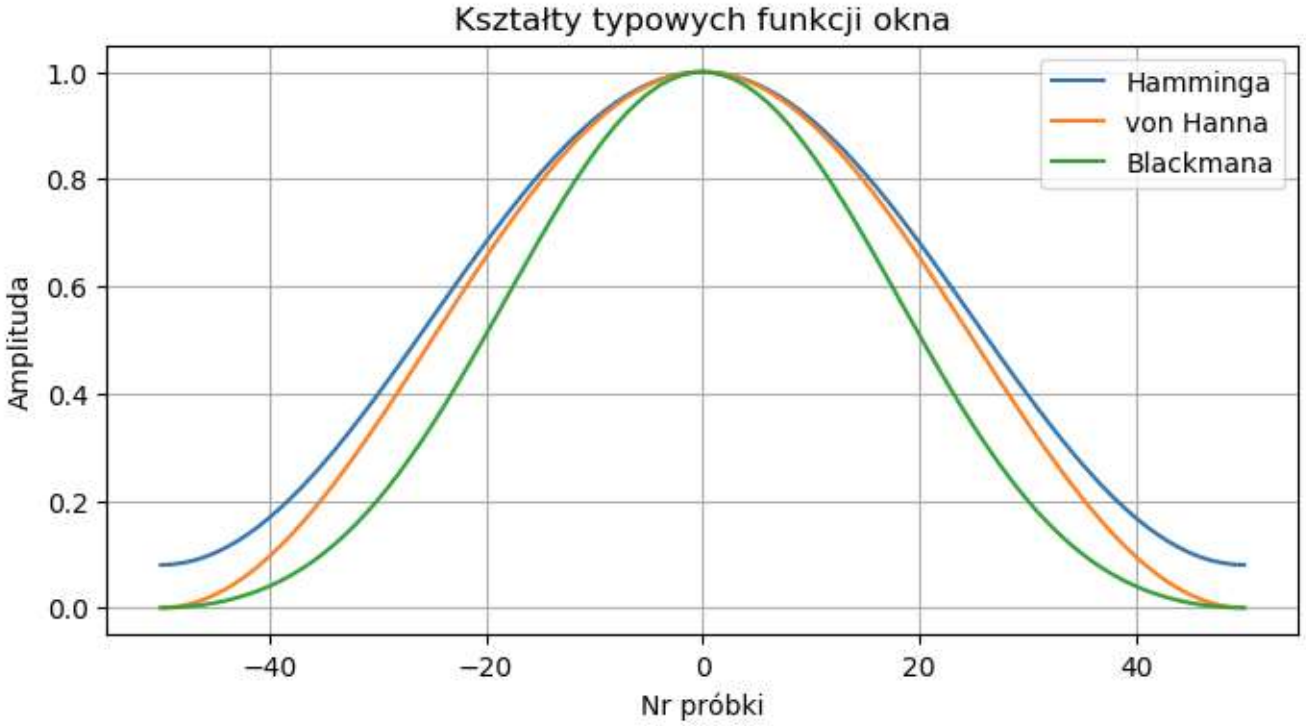
Powodem zniekształceń jest nieciągłość odpowiedzi impulsowej na granicach przyciętego fragmentu:



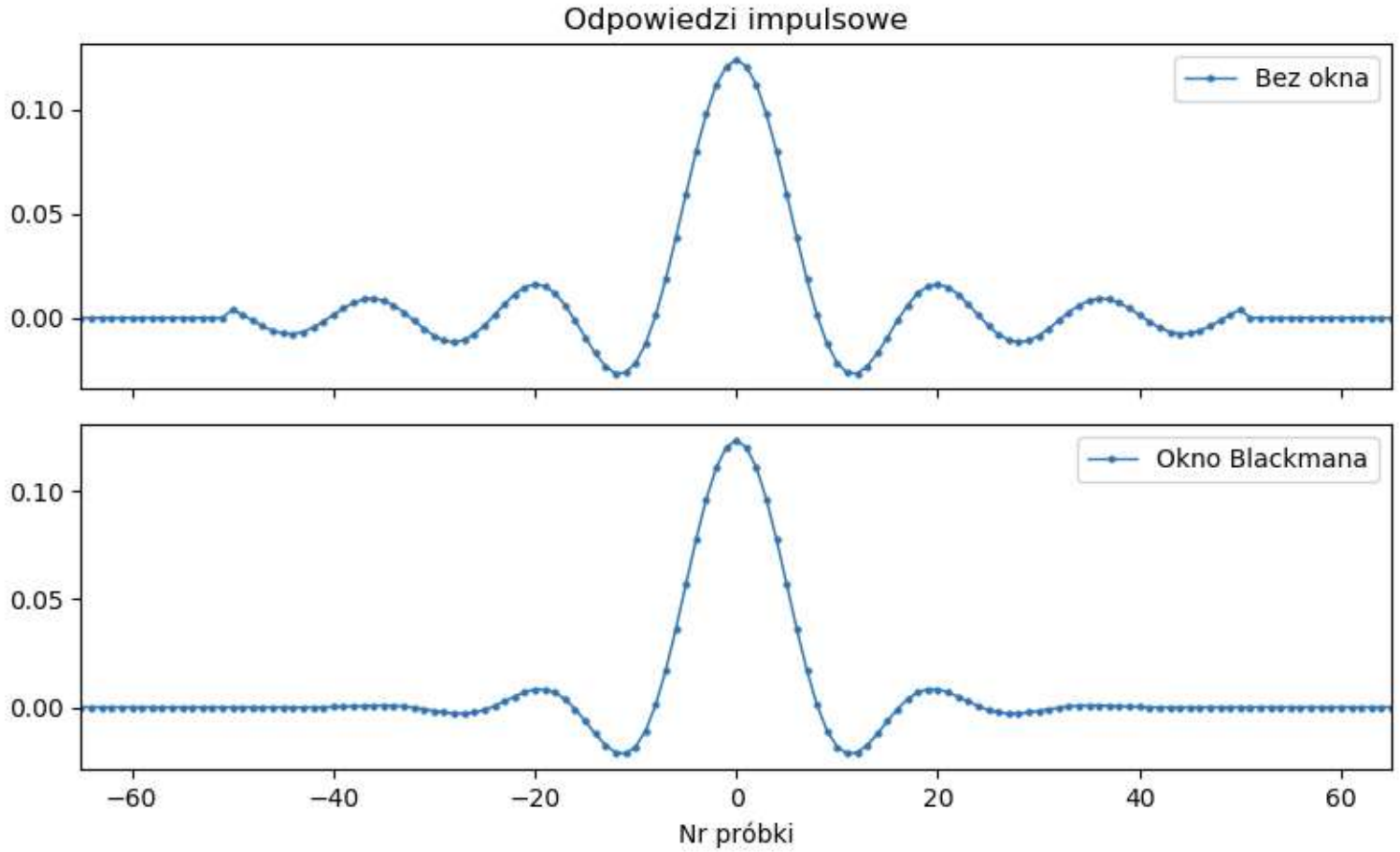
Rozwiązaniem jest przemnożenie przycinanej odpowiedzi impulsowej przez funkcję okna (*window*).

Typowe okna: Hamminga, von Hanna, Blackmana.

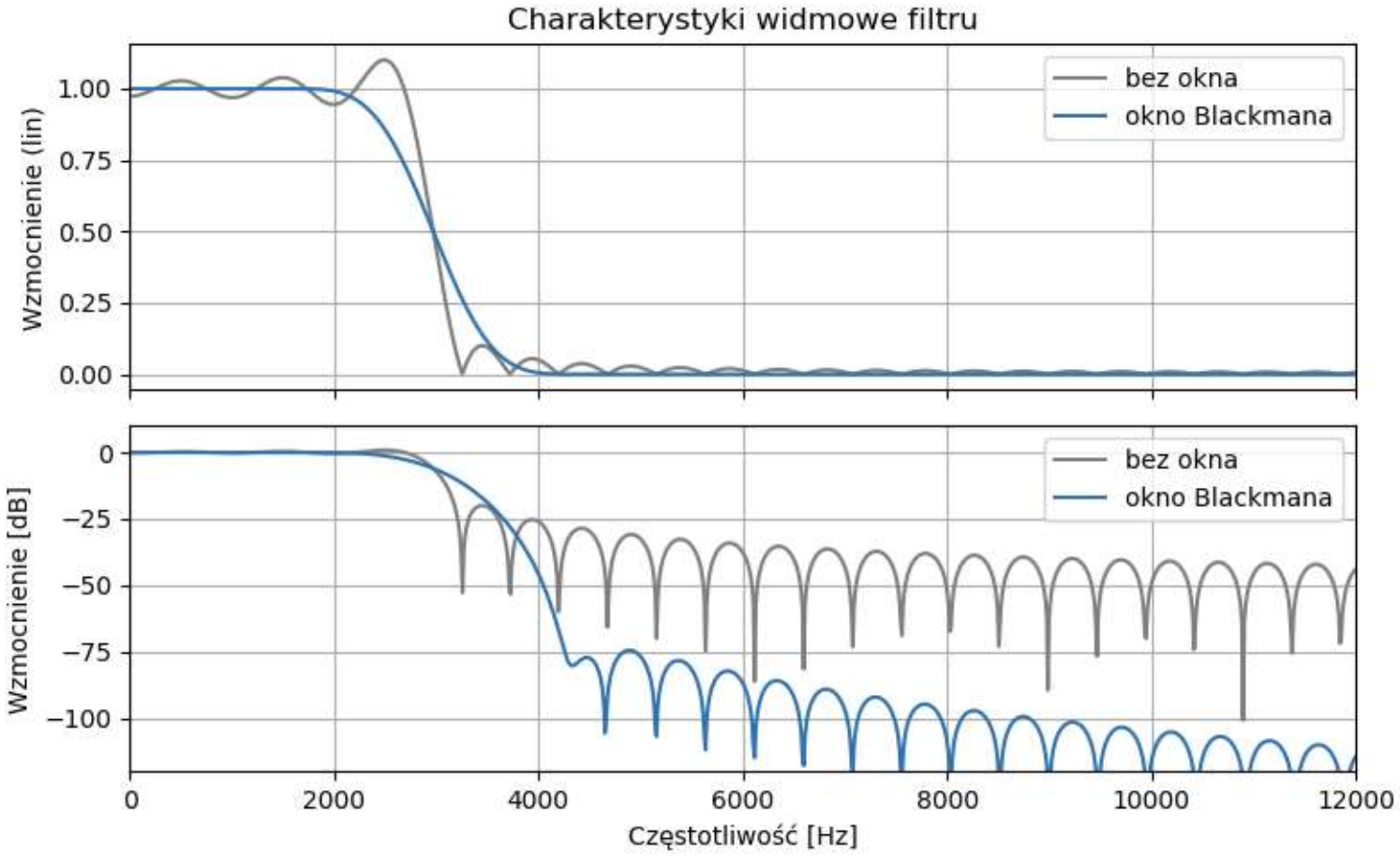
Wybór okna ma wpływ na kształt charakterystyki filtru.



Odpowiedź impulsowa przycięta bez okna oraz oknem Blackmana:

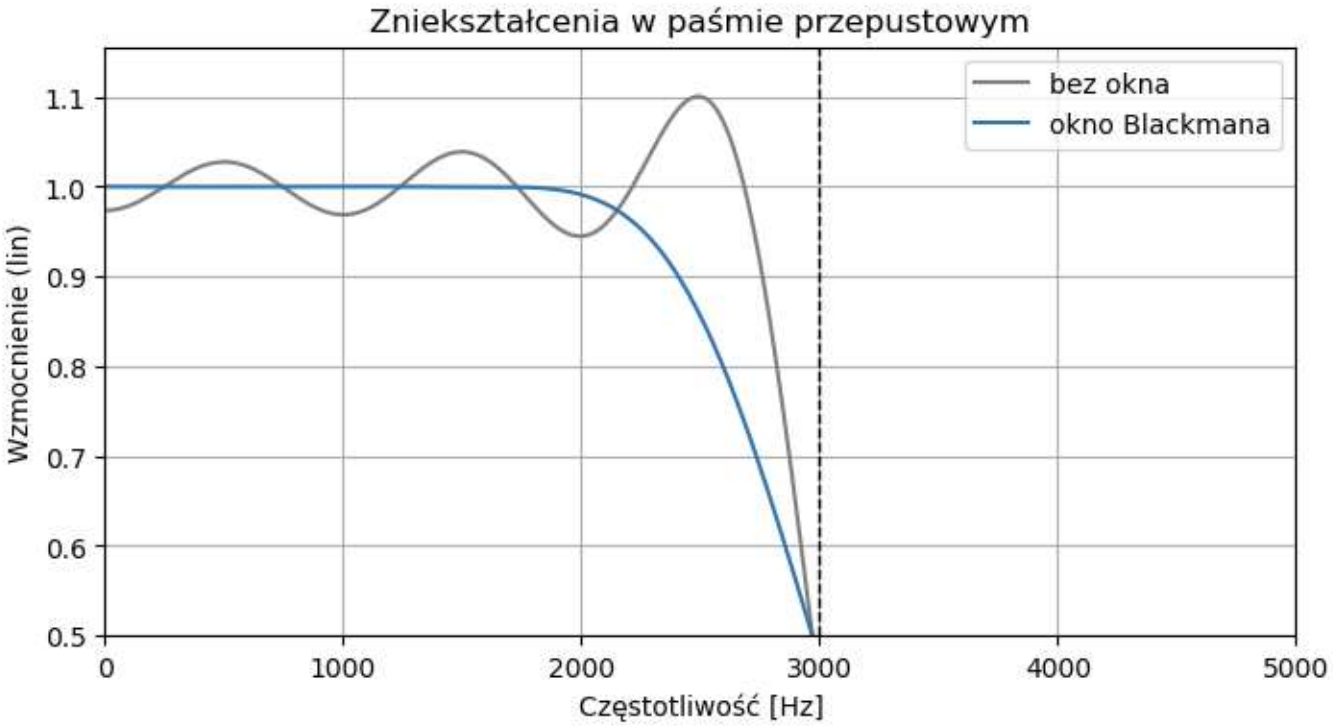


Porównanie charakterystyk widmowych bez okna i z oknem Blackmana (N = 101):



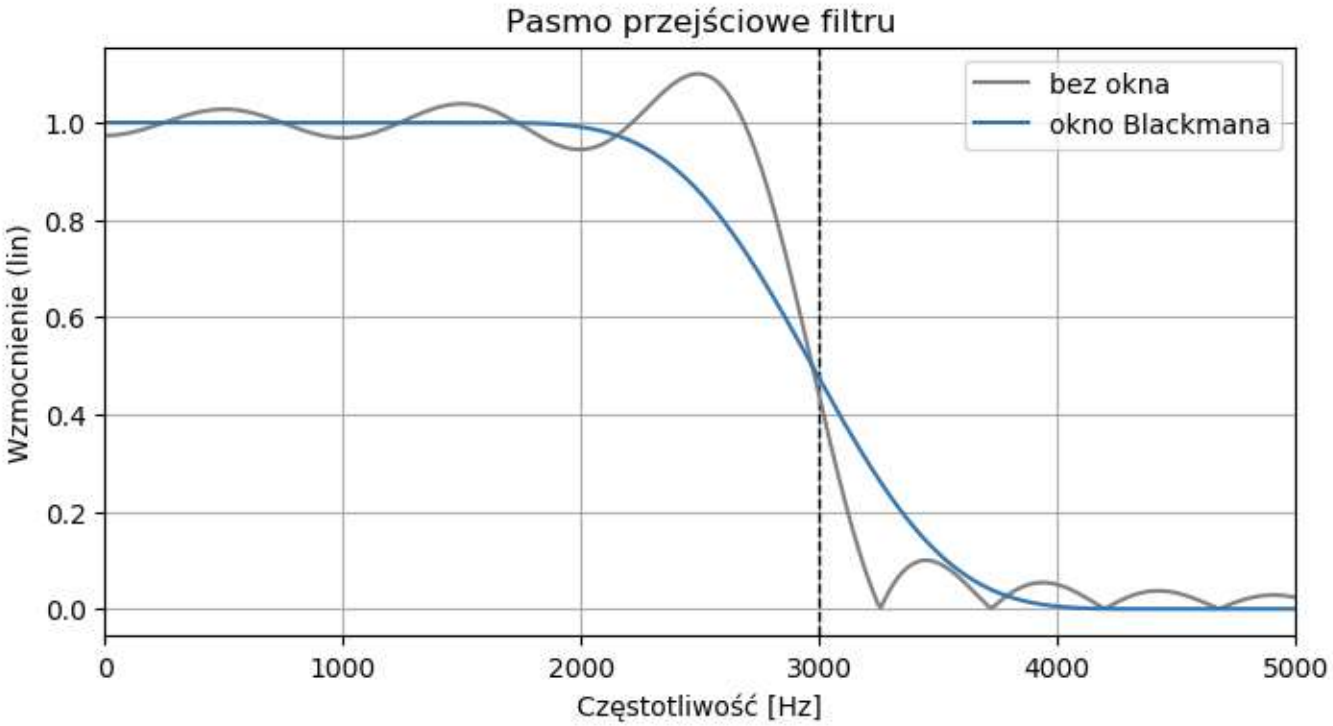
Zniekształcenia w wyniku przycięcia odp. imp.

1. Zafalowania charakterystyki w paśmie przepustowym - korygowane przez funkcję okna.



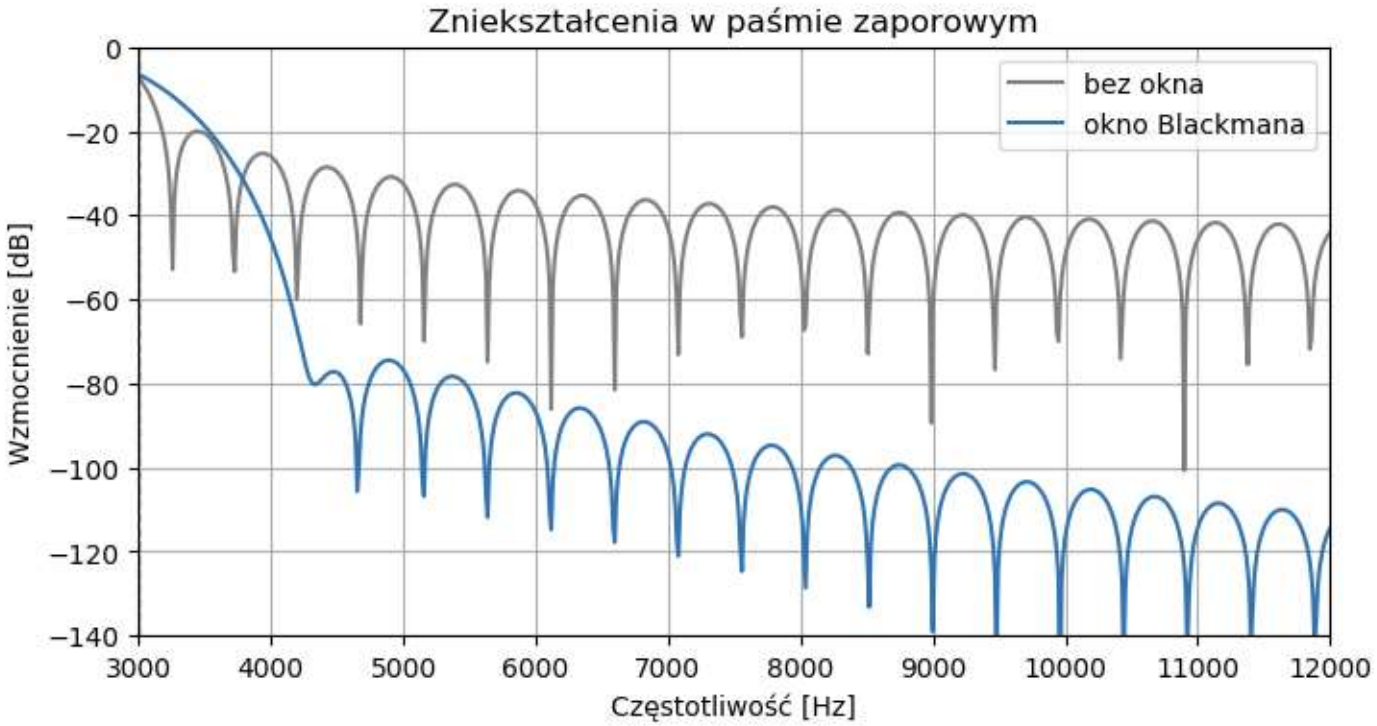
Zniekształcenia w wyniku przycięcia odp. imp.

2. Pasmo przejściowe – filtr zaczyna tłumić przed i kończy za częstotliwością graniczną.
Funkcje okna poszerzają pasmo przejściowe!

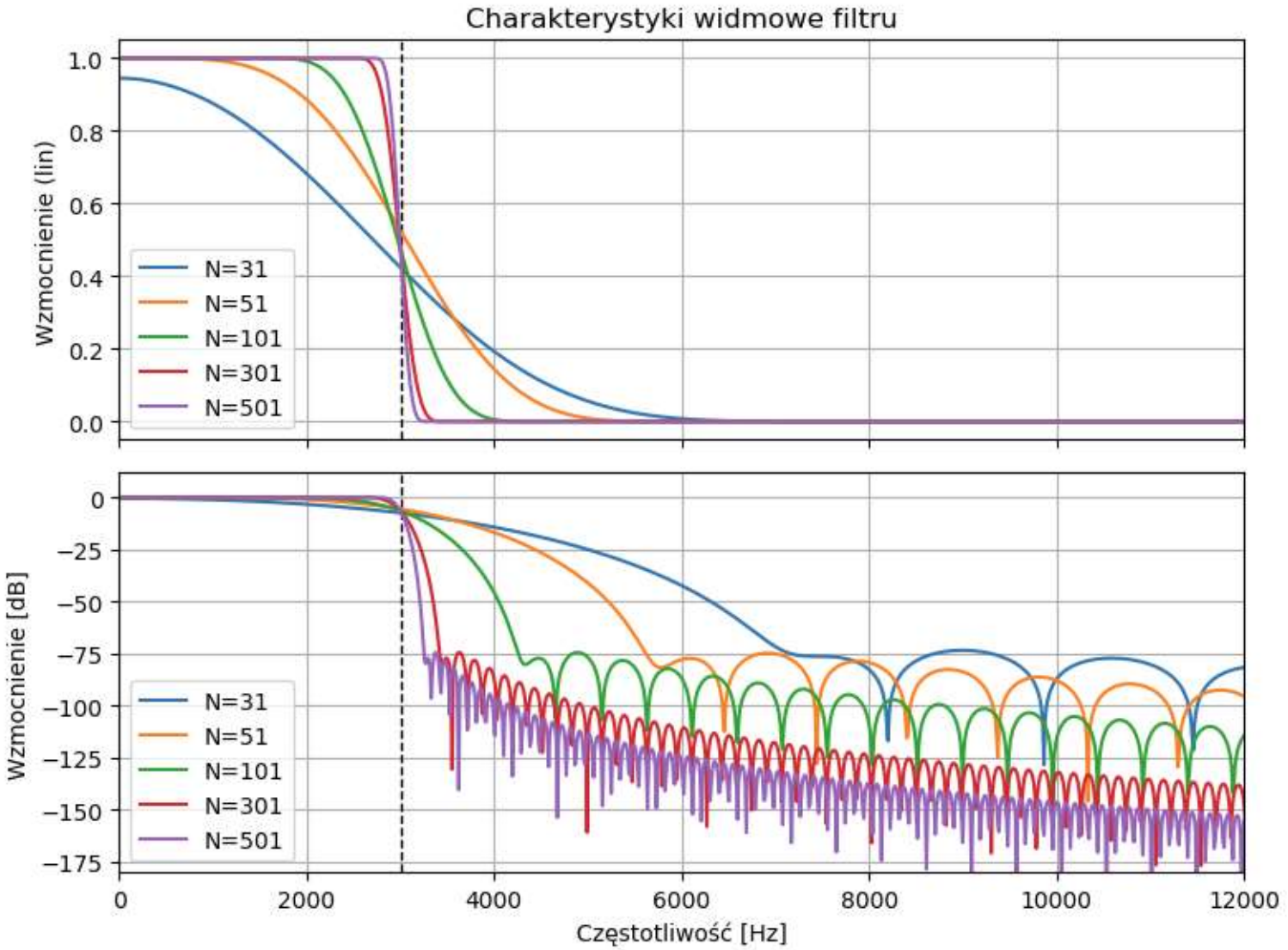


Zniekształcenia w wyniku przycięcia odp. impulsowej

3. Zafalowania w paśmie zaporowym
(zmniejszone tłumienie sygnału w tym paśmie)
- redukowane przez funkcję okna.



Jaki wpływ na kształt charakterystyki ma długość filtru?



Jakie są zalety filtrów o większej długości?

Im większe *N*, tym bliżej jesteśmy charakterystyki idealnego filtru. A zatem:

- węższe pasmo przejściowe,
- mniejsze zafalowania w paśmie przepustowym,
- większe tłumienie w paśmie zaporowym,
- ogólnie bardziej skuteczna filtracja.

A więc: lepiej zawsze używać możliwie długich filtrów?

Jakie są wady filtrów o większej długości?

Większe *N* oznacza:

- więcej obliczeń (mnożenia, dodawania), dłuższy czas potrzebny na przeprowadzenie filtracji,
- większą zajętość pamięci (bufor próbek, tablica współczynników),
- większe opóźnienie między wejściem a wyjściem filtru – to jest największa wada.

Wpływ okna na charakterystyki filtru

Przybliżona szerokość pasma przejściowego oraz minimalne tłumienie w paśmie zaporowym przy długości filtru N i cz. próbkowania f_S:

Okno	Szerokość	Tłumienie
brak	$0{,}9\ f_S / N$	21 dB
von Hann	$3{,}1\ f_S / N$	44 dB
Hamming	$3{,}3\ f_S / N$	53 dB
Blackman	$5{,}5\ f_S / N$	74 dB

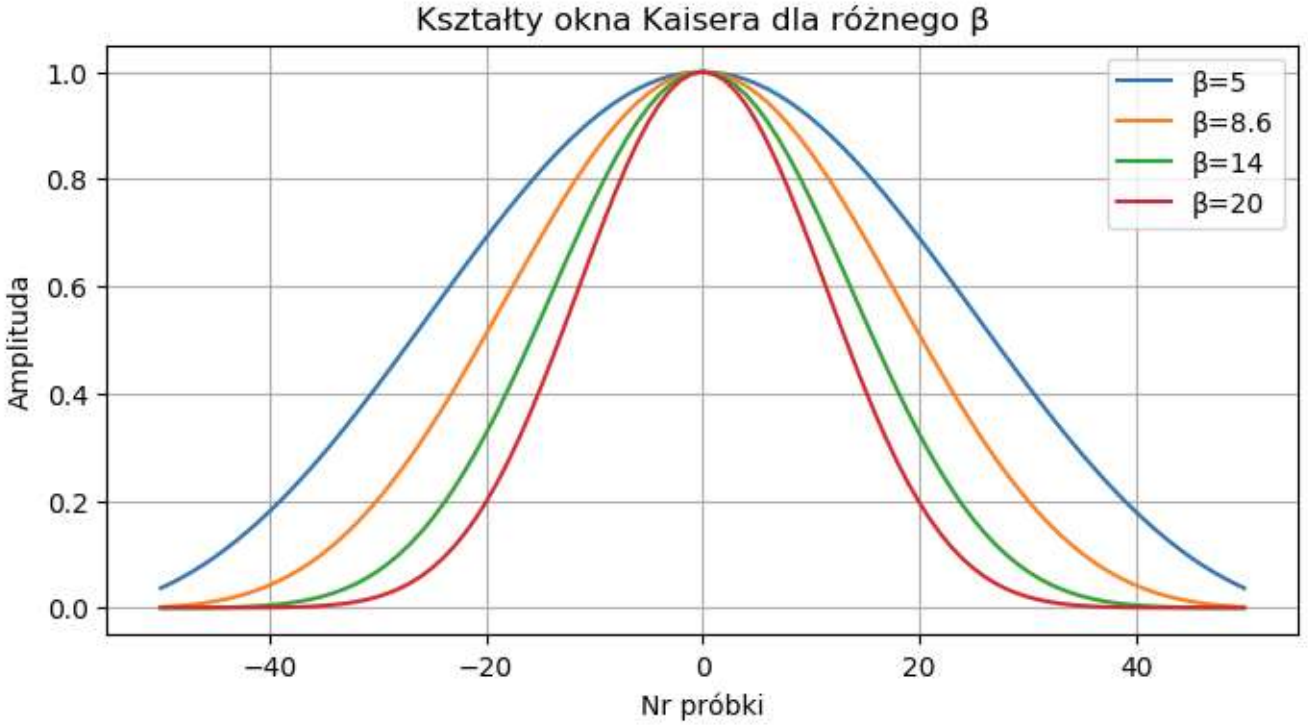
Wpływ okna na charakterystyki filtru

- Użycie okna powoduje zwiększenie (polepszenie) tłumienia w paśmie zaporowym.
- Zmniejszane są zafalowania w paśmie przepustowym.
- Wytłumienie współczynników na końcach okna powoduje zmniejszenie efektywnej długości filtru – poszerzenie pasma przejściowego.
- Trzeba to zrekompensować zwiększeniem długości filtru.

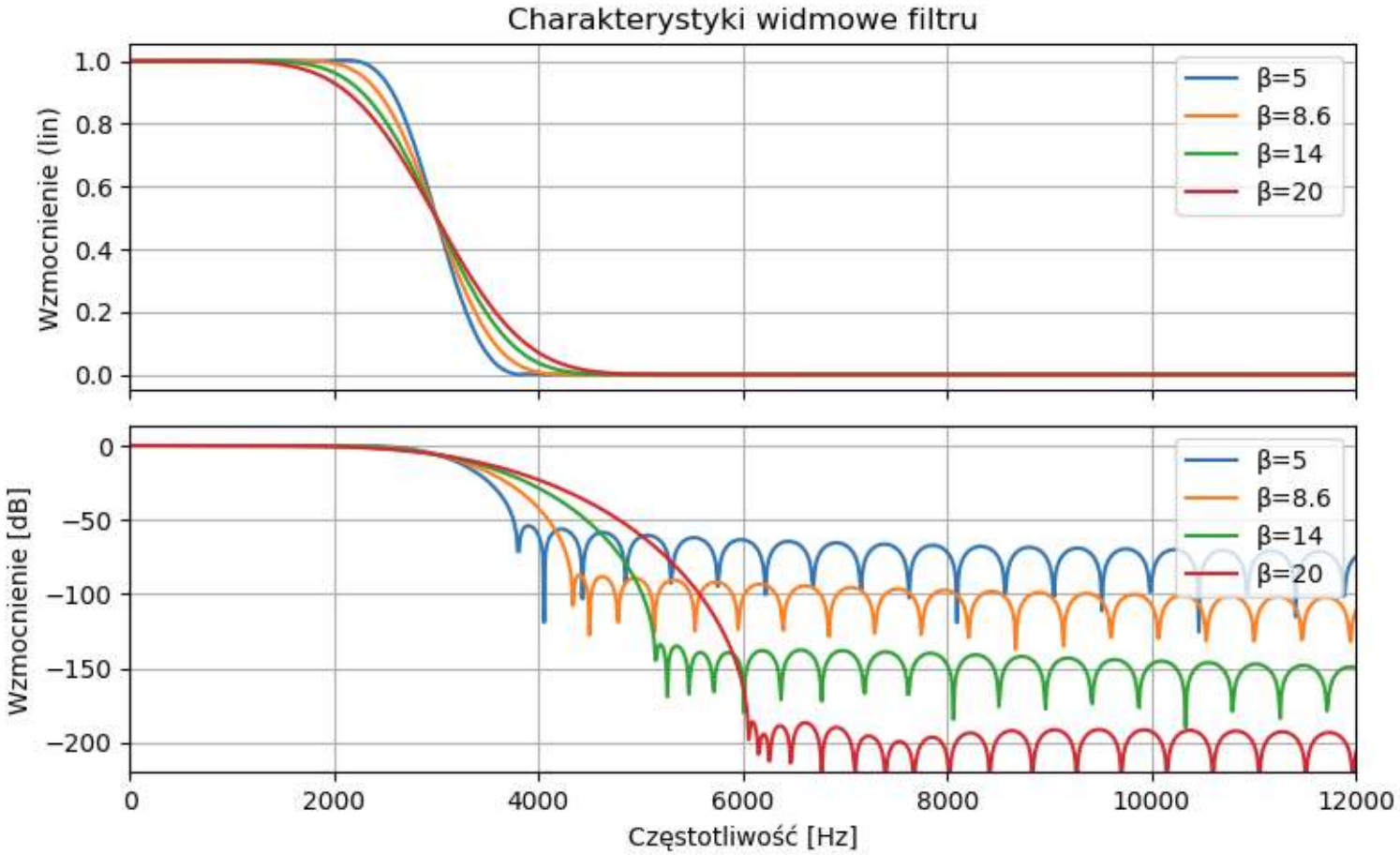
Okno Kaisera jest użyteczne w projektowaniu filtrów.

Posiada parametr β, który decyduje o kształcie okna.

Pozwala on wpływać na kształt charakterystyki filtru.



Charakterystyki widmowe filtru (*N*=101) dla okna Kaisera z różnymi wartościami β :



Zastosowanie okna Kaisera do projektowania filtru:

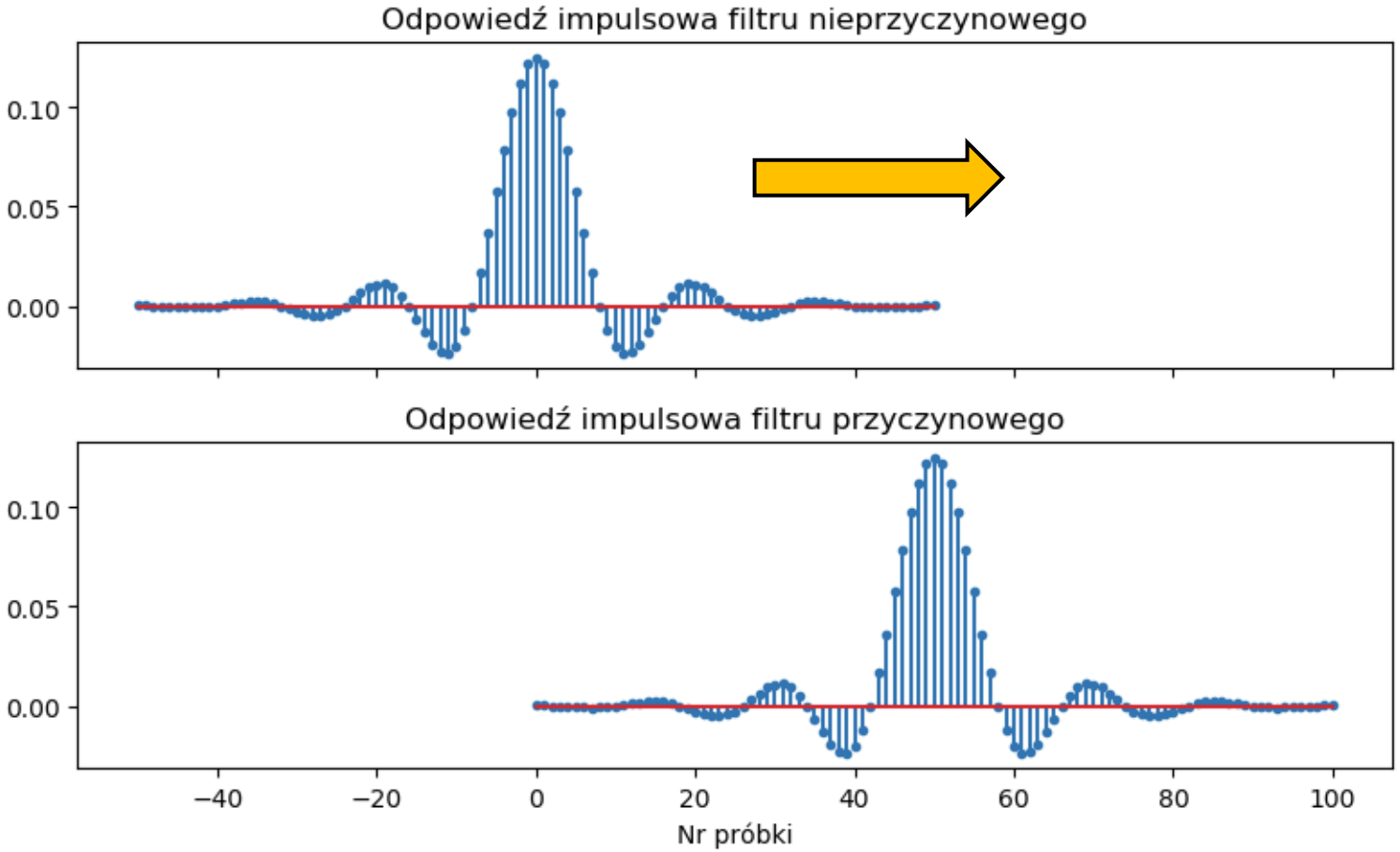
- zakładamy minimalne tłumienie w p. zaporowym i maksymalny poziom zafalowań w p. przepustowym – bierzemy większą z tych wartości (w dB),
- zakładamy szerokość pasma przepustowego,
- obliczamy β dające zadane tłumienie (ze wzoru),
- obliczamy długość filtru dającą zadaną szerokość.

Przykład: zakładamy min. tłumienie pz -80 dB, max. zafalowanie pp 0,005 (46 dB), szerokość p. przejściowego 100 Hz. Stąd obliczamy:

$\beta = 7{,}8573 \quad N = 2410$

Pozostaje drugi problem – nieprzyczynowy filtr.

Możemy go łatwo rozwiązać przesuwając przyciętą odpowiedź impulsową tak, aby zaczynała się w zerze.



Praktyczna interpretacja tego przesunięcia:

- Filtr nieprzyczynowy o długości $N=2M+1$ potrzebuje:
  - M poprzednich próbek sygnału,
  - bieżącą próbkę sygnału,
  - M przyszłych próbek sygnału.
- Nie mamy jeszcze M przyszłych próbek, musimy na nie poczekać M okresów próbkowania.
- Wynik filtracji bieżącej próbki pojawi się na wyjściu filtru po M okresach próbkowania (opóźnienie).

$$M = \frac{N-1}{2}$$

Charakterystyka częstotliwościowa filtru FIR:

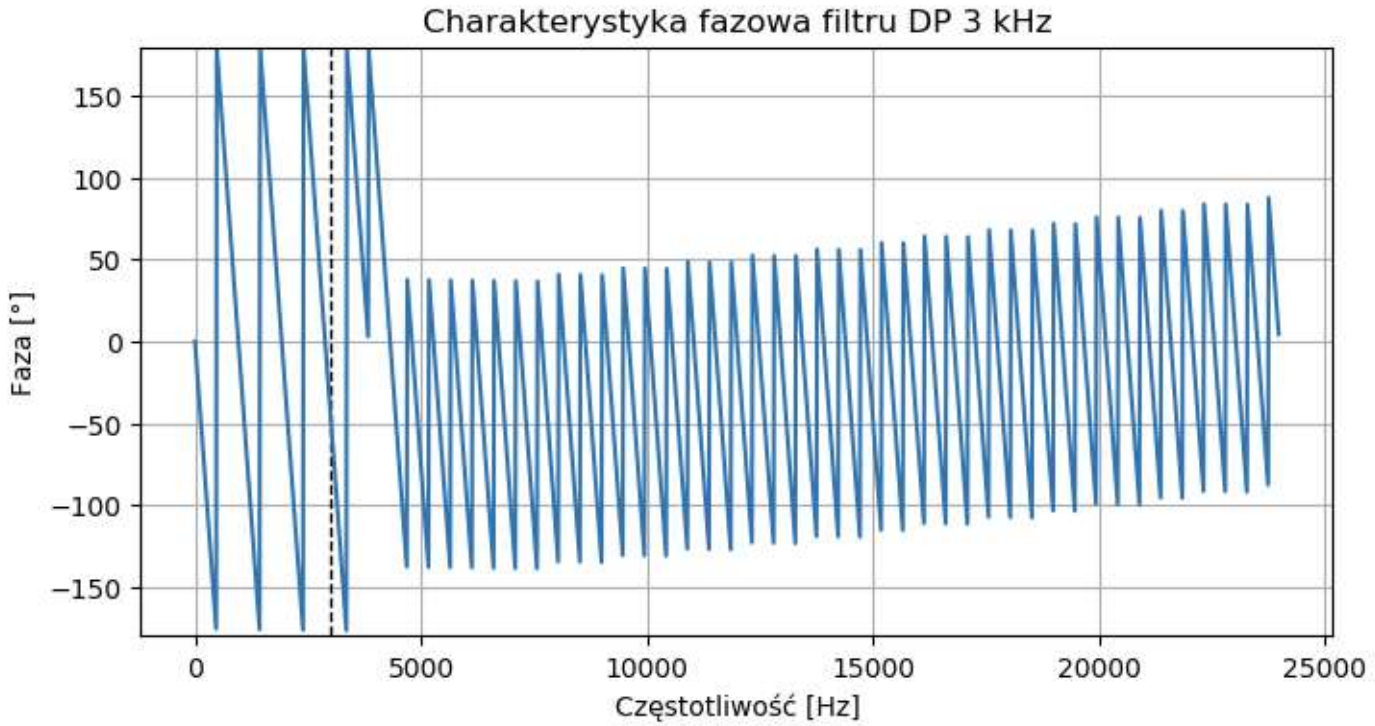
$$H(f) = \mathrm{Re}\,H(f) + j\,\mathrm{Im}\,H(f)$$
$$H(f) = |H(f)| \cdot \mathrm{e}^{j\varphi(f)}$$

$|\mathrm{H}(f)|$ – charakterystyka amplitudowa

$\phi(f)$ – charakterystyka fazowa

$$\varphi(f) = \arg(H(f)) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\,H(f)}{\mathrm{Re}\,H(f)}\right)$$

Charakterystyka fazowa filtru FIR projektowana metodami opisanymi na wykładzie jest zawsze (odcinkami) liniowa. Nieciągłości fazy wynikają z jej cykliczności (zawijanie wokół 2π).



Mamy dwa sygnały sinus.

- Identyczna częstotliwość.
- Identyczna amplituda.

Dodajemy oba sygnały do siebie.

Jaki będzie wynik tego dodawania?

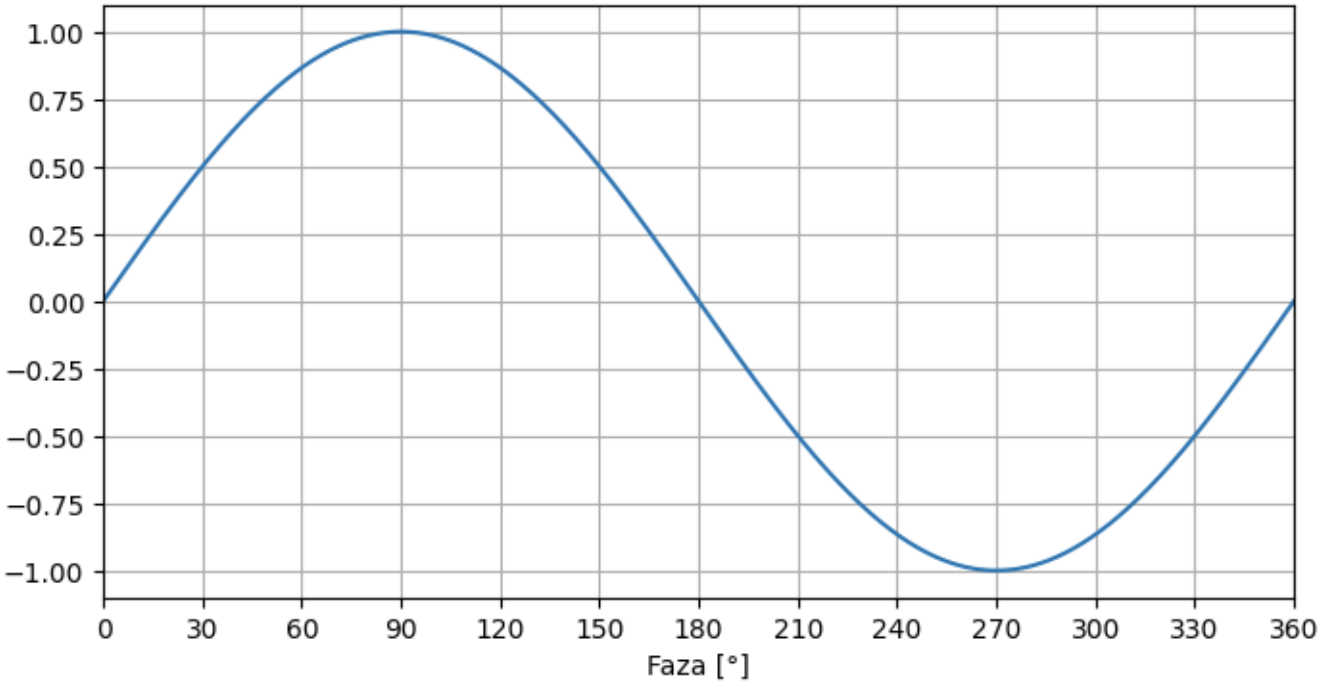
Odpowiedź na kolejnych slajdach.

(Tak, to jest podchwytliwe pytanie.)

Faza sygnału sinus określa położenie wewnątrz okresu.

Faza = argument *x* sinusa *sin*(*x*).

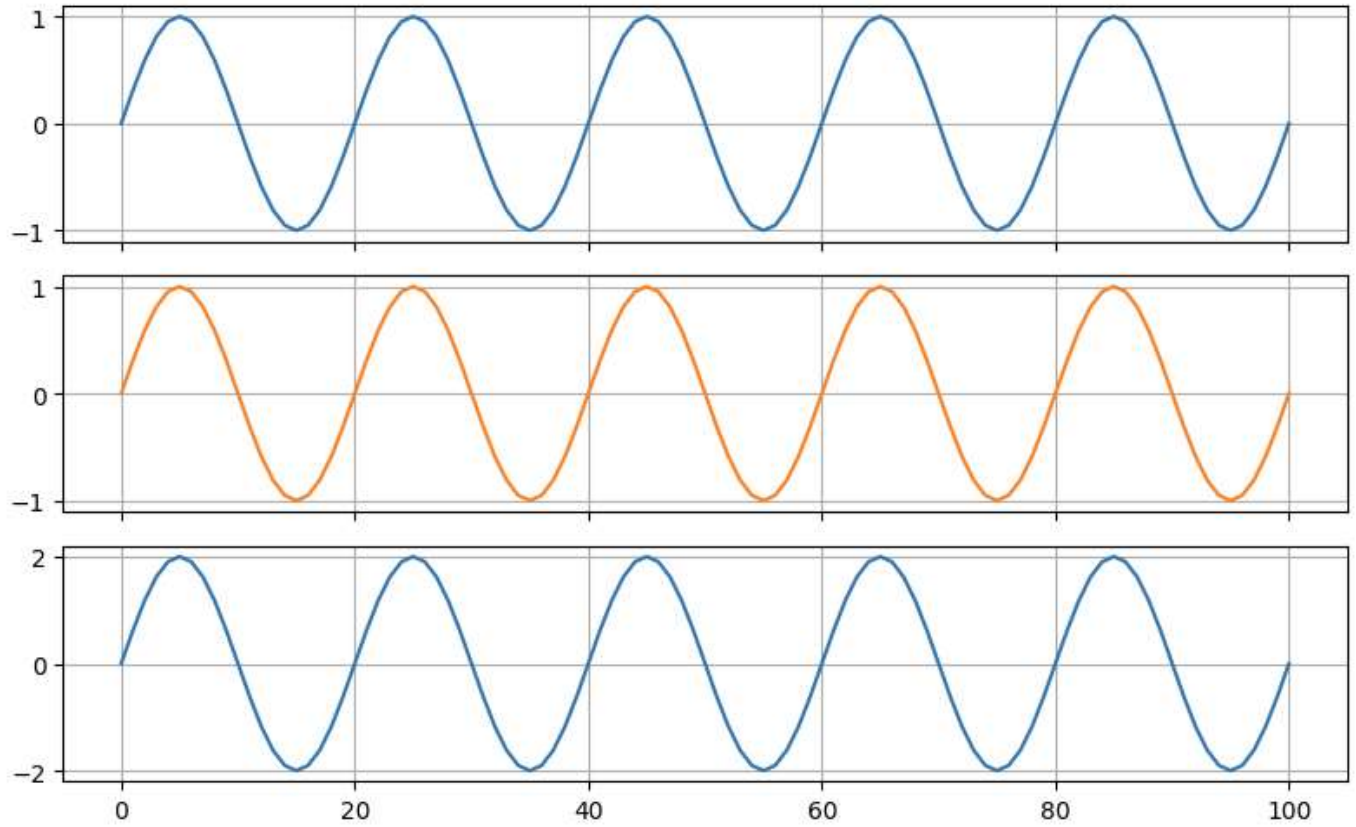
Kąt w stopniach (0-360) lub w radianach (0-2π).



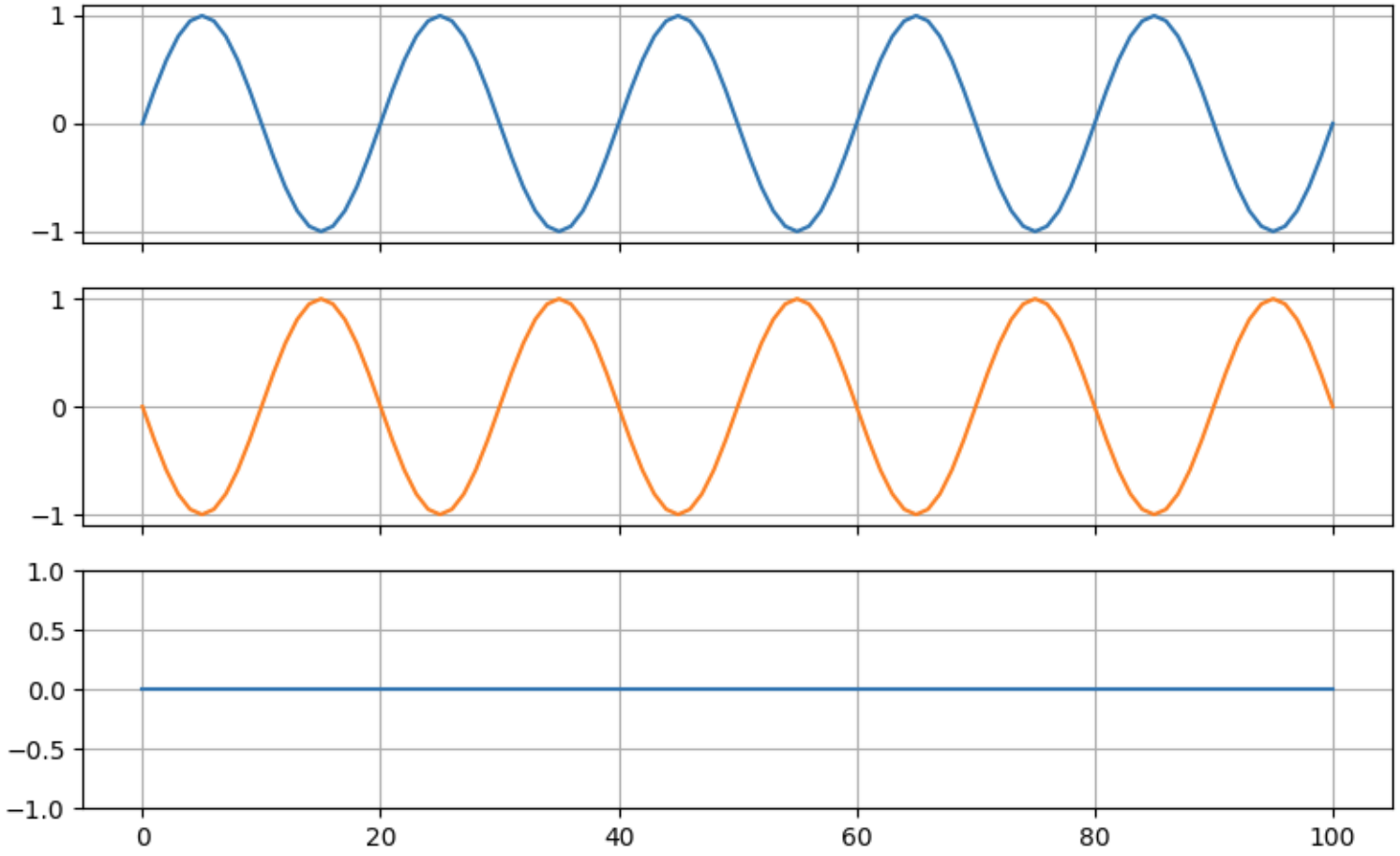
Faza pojedynczego sygnału jest bez znaczenia.

Dla dwóch sygnałów możemy mówić o różnicy fazy lub o przesunięciu fazowym (*phase shift*).

Suma dwóch sinusów o zgodnej fazie:

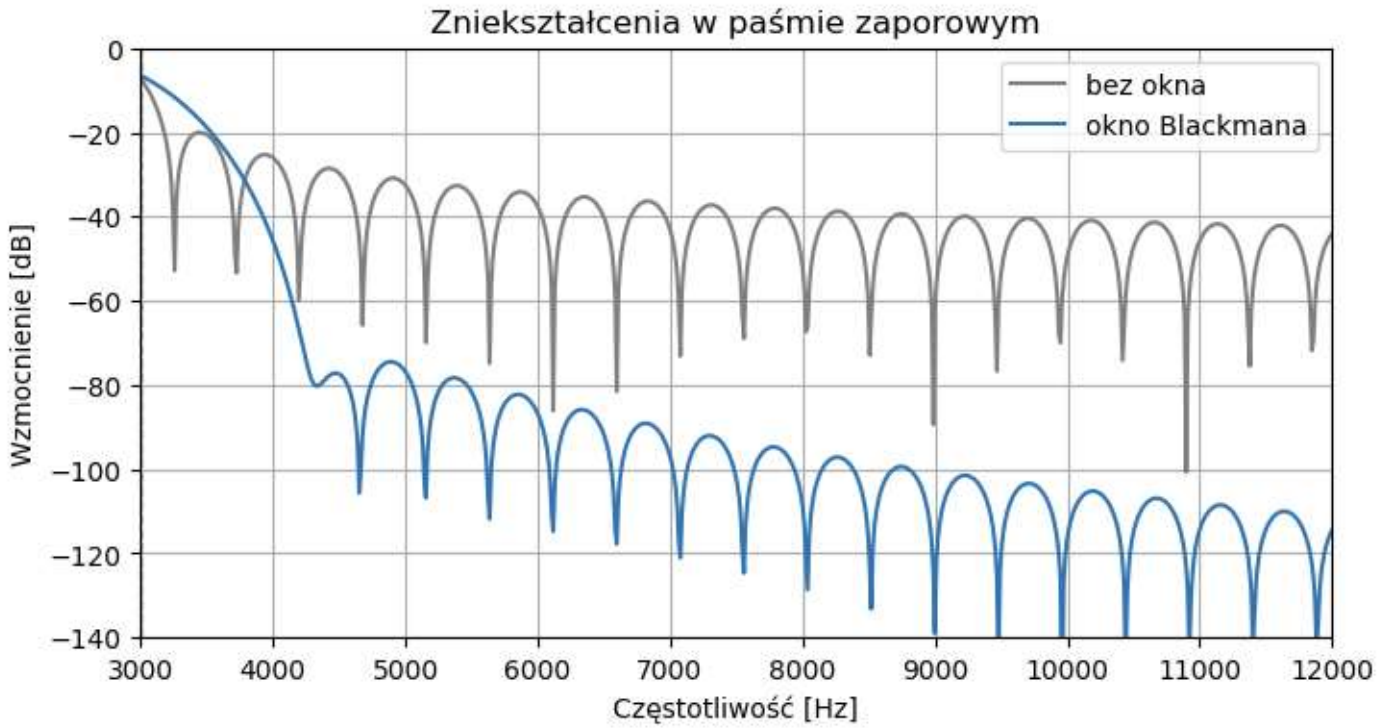


Jeżeli jeden z sinusów jest przesunięty w fazie względem drugiego o dokładnie pół okresu (180°, π), sygnały są w przeciwfazie – ich suma jest zerowa.

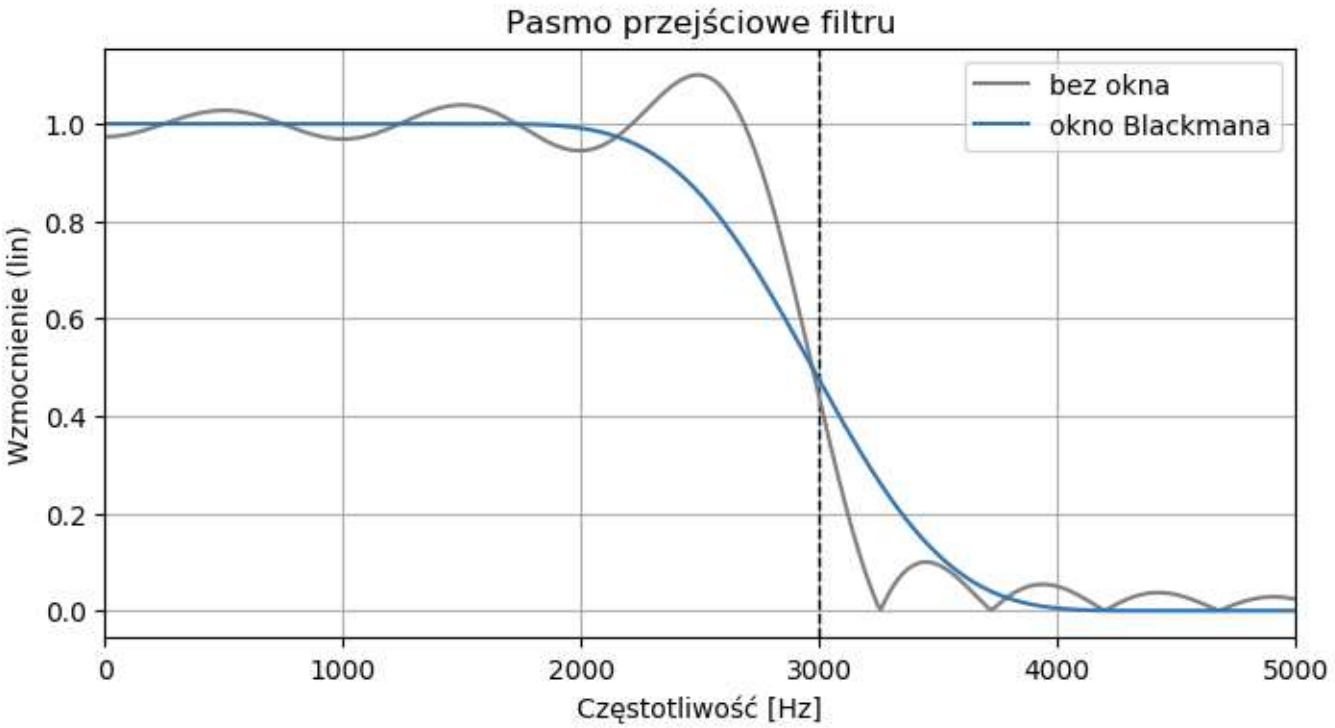


- Złożony sygnał można traktować jako sumę sinusów o różnych częstotliwościach i amplitudach.
- Sumujemy te sinusy z kopiami przesuniętymi fazowo.
- W paśmie przepustowym filtru – staramy się, aby różnica fazy była zerowa (zgodna faza).
- W paśmie zaporowym filtru – staramy się, aby różnica fazy była równa 180° (przeciwfaza), tak aby składowe zostały wytłumione.
- I tak właśnie działają filtry – sumują sygnał z przetworzoną fazowo kopią, manipulując fazami składowych tak, aby niektóre wytłumić, a niektóre pozostawić. Oto cała magia.

Pamiętajmy, że mamy filtr nieidealny, o skończonej długości. Nie da się utrzymać stabilnej przeciwfazy w paśmie zaporowym – faza będzie się cyklicznie „rozjeżdżać”. Stąd powstają zafalowania (oscylacje) w paśmie zaporowym.



Podobnie, nie możemy uzyskać gwałtownego przejścia między przesunięciem fazowym 0° a 180°. W paśmie przejściowym filtru, przesunięcie fazowe zmienia się stopniowo od 0° do 180° - im krótszy filtr, tym dłużej zachodzi ta zmiana.



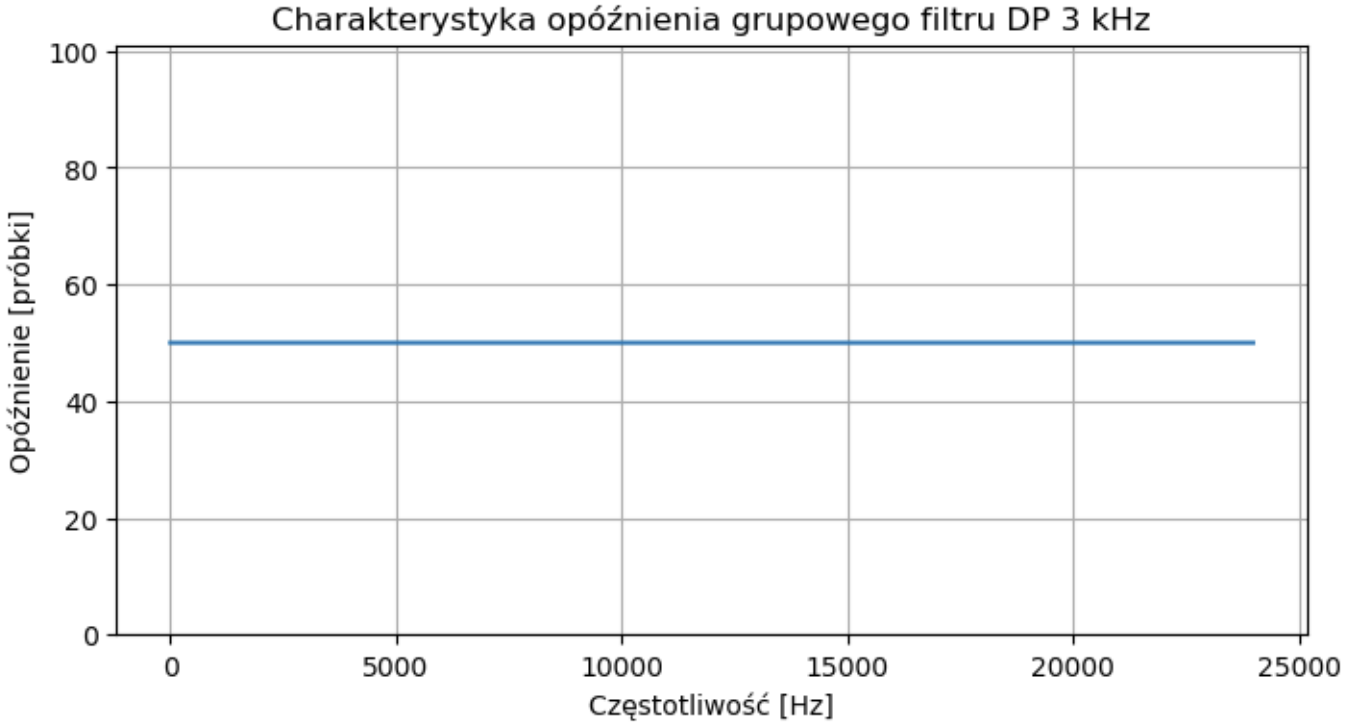
Co nam daje liniowość fazy filtru FIR?

Opóźnienie grupowe (*group delay*) jest równe ujemnej pochodnej charakterystyki fazowej:

$$D(f) = -\frac{\mathrm{d}\varphi(f)}{\mathrm{d}f}$$

Opóźnienie grupowe dla częstotliwości f
= nachylenie charakterystyki fazowej
dla tej częstotliwości (z odwróconym znakiem).

Charakterystyka opóźnienia grupowego filtru FIR

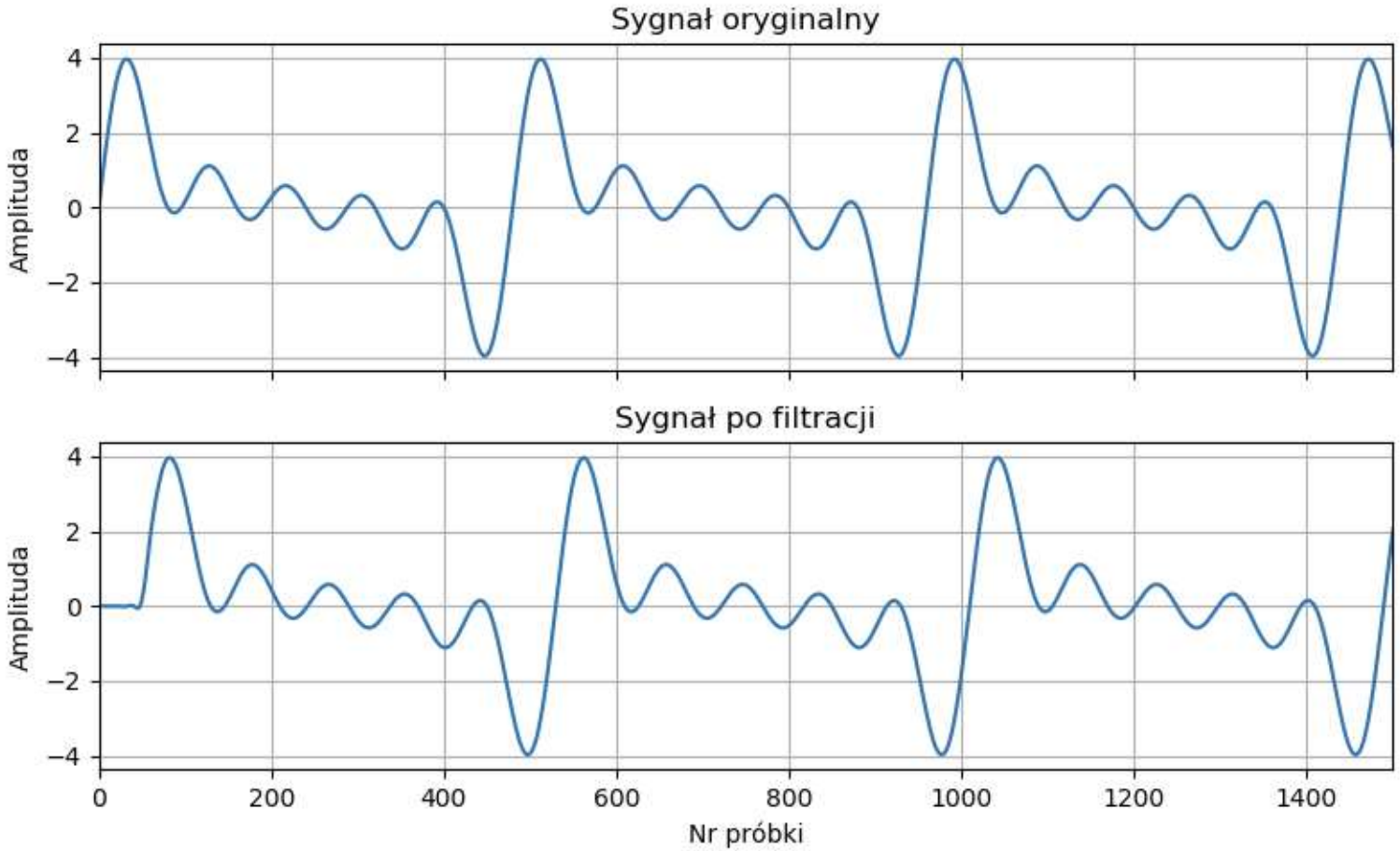


Liniowa faza = stała pochodna = stałe opóźnienie grupowe, równe $(N-1)/2$, czyli tyle, o ile przesunęliśmy odpowiedź impulsową.

Co nam daje stałe opóźnienie grupowe?

- Jeżeli mamy sygnał o złożonym widmie (np. mowa, muzyka), to wszystkie składowe widmowe są opóźniane przez filtr o tę samą liczbę próbek.
- Zależności fazowe między składowymi widmowymi na wyjściu filtru są takie same, jak na wejściu.
- Inaczej: jeżeli dwie składowe widmowe pojawiły się na wejściu filtru w tym samym czasie, to na wyjściu także pojawią się równocześnie.
- Liniowofazowy filtr FIR nie wprowadza zniekształceń fazowych – jest to ważna cecha tych filtrów.

Ilustracja opóźnienia grupowego
– widoczne opóźnienie sygnału po filtracji.



Opisana metoda projektowania filtrów FIR nosi nazwę metody okienkowania (*windowing*).

Podsumowując:

- projektujemy idealną charakterystykę w dziedzinie częstotliwości,
- obliczamy odpowiedź impulsową (IFFT),
- przycinamy funkcją okna do żądanej długości,
- przesuwamy na osi czasu tak aby zaczynała się w 0.

I gotowe, mamy współczynniki filtru.

Dla typowych charakterystyk (DP, GP, PP, PZ) zwykle obliczamy odpowiedź impulsową bezpośrednio, bez konieczności liczenia IFFT.

Dla filtru dolnoprzepustowego o częstotliwości granicznej f_c i cz. próbkowania f_S:
(nie uczyć się wzorów na pamięć!)

$$h[n] = \frac{\sin(2\pi\, n\, f_c / f_S)}{n\pi} = 2\pi \frac{f_c}{f_S} \operatorname{sinc}\left(2 \frac{f_c}{f_S} n\right)$$

$\operatorname{sinc}(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$

Obliczoną odpowiedź trzeba przemnożyć przez okno i przesunąć o (N-1)/2.

Filtr górnoprzepustowy można otrzymać z filtru DP.

W dziedzinie widma: GP(f) = 1 – DP(f).

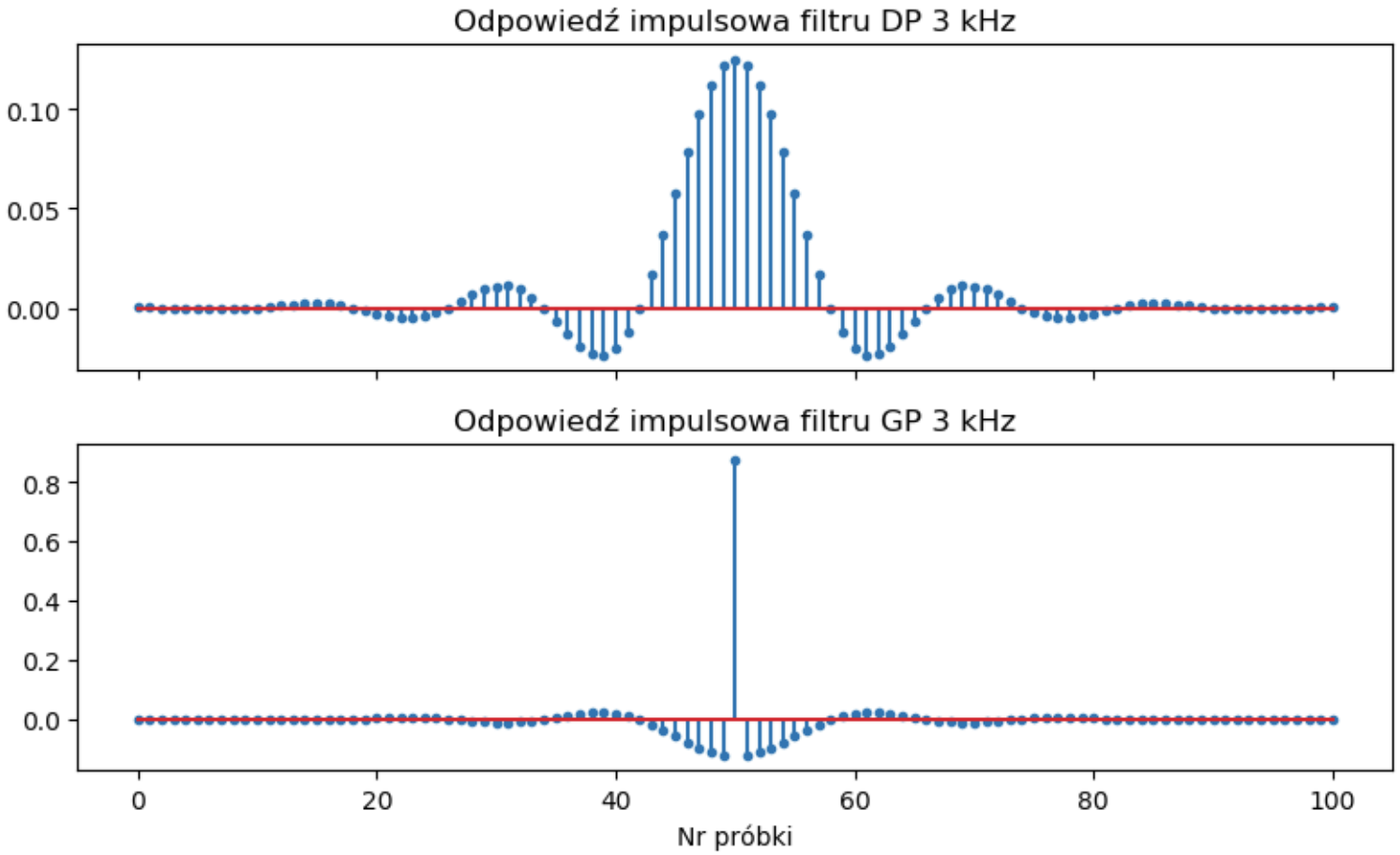
W dziedzinie czasu:

$$h_{GP}[n] = \delta[n] - h_{DP}[n]$$

W praktyce:

- obliczamy odpowiedź dla filtru DP o tej samej częstotliwości granicznej,
- odwracamy znak każdej wartości,
- dodajemy 1 do wartości dla czasu zerowego,
- mnożymy przez okno i przesuwamy.

Porównanie odpowiedzi impulsowych DP i GP



Filtr pasmowo-przepustowy:

- widma: PP(f) = DP(f) · GP(f) = DPg(f) – DPd(i)
- w dziedzinie czasu – dwie metody:

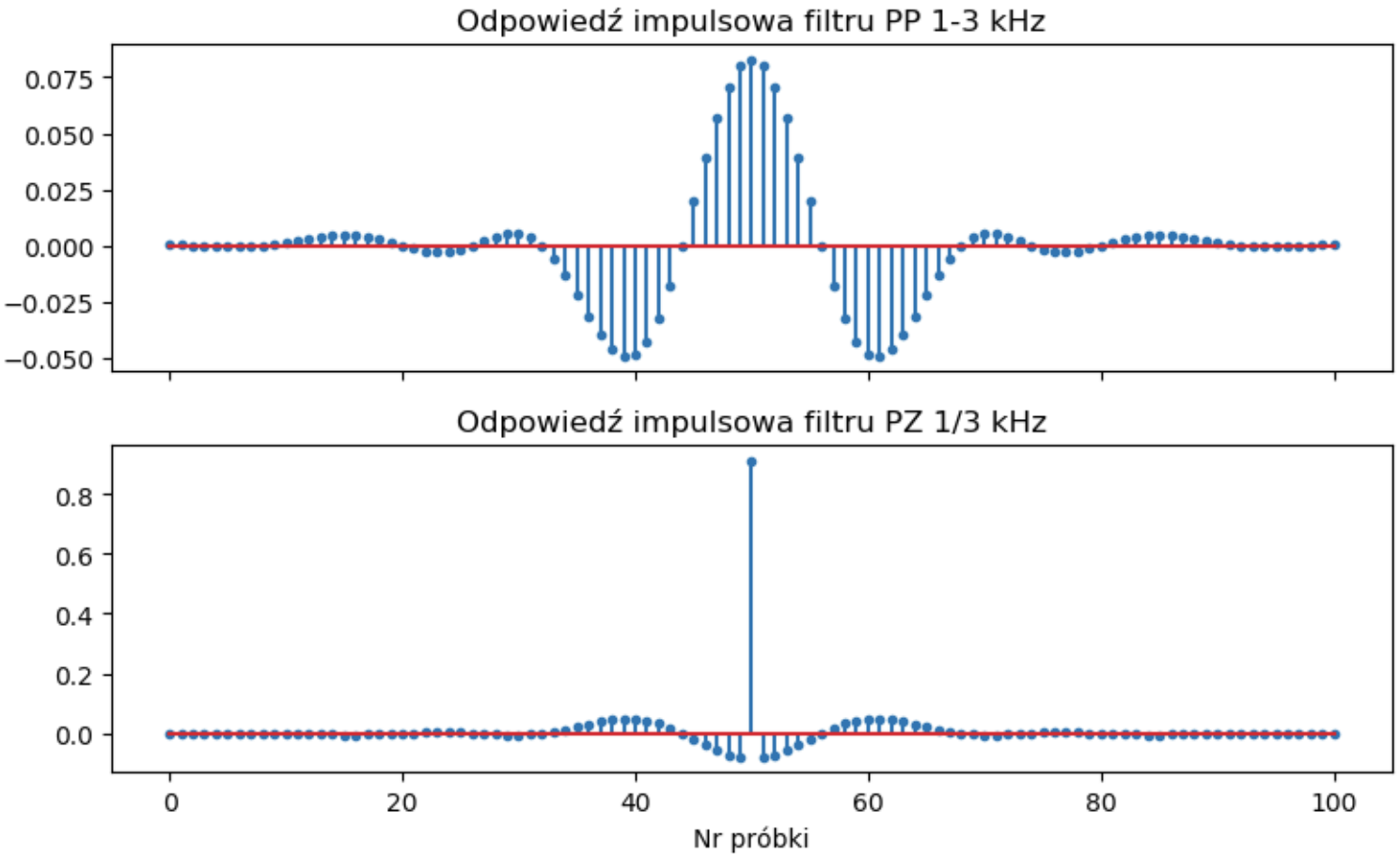
$$h_{PP}[n] = h_{DP}[n] * h_{GP}[n] \qquad h_{PP}[n] = h_{DPg}[n] - h_{DPd}[n]$$

Filtr pasmowo-zaporowy:

- widma: PP(f) = DP(f) + GP(f) = 1 – PP(f)
- w dziedzinie czasu – dwie metody:

$$h_{PZ}[n] = h_{DP}[n] + h_{GP}[n] \qquad h_{Pz}[n] = \delta[n] - h_{PP}[n]$$

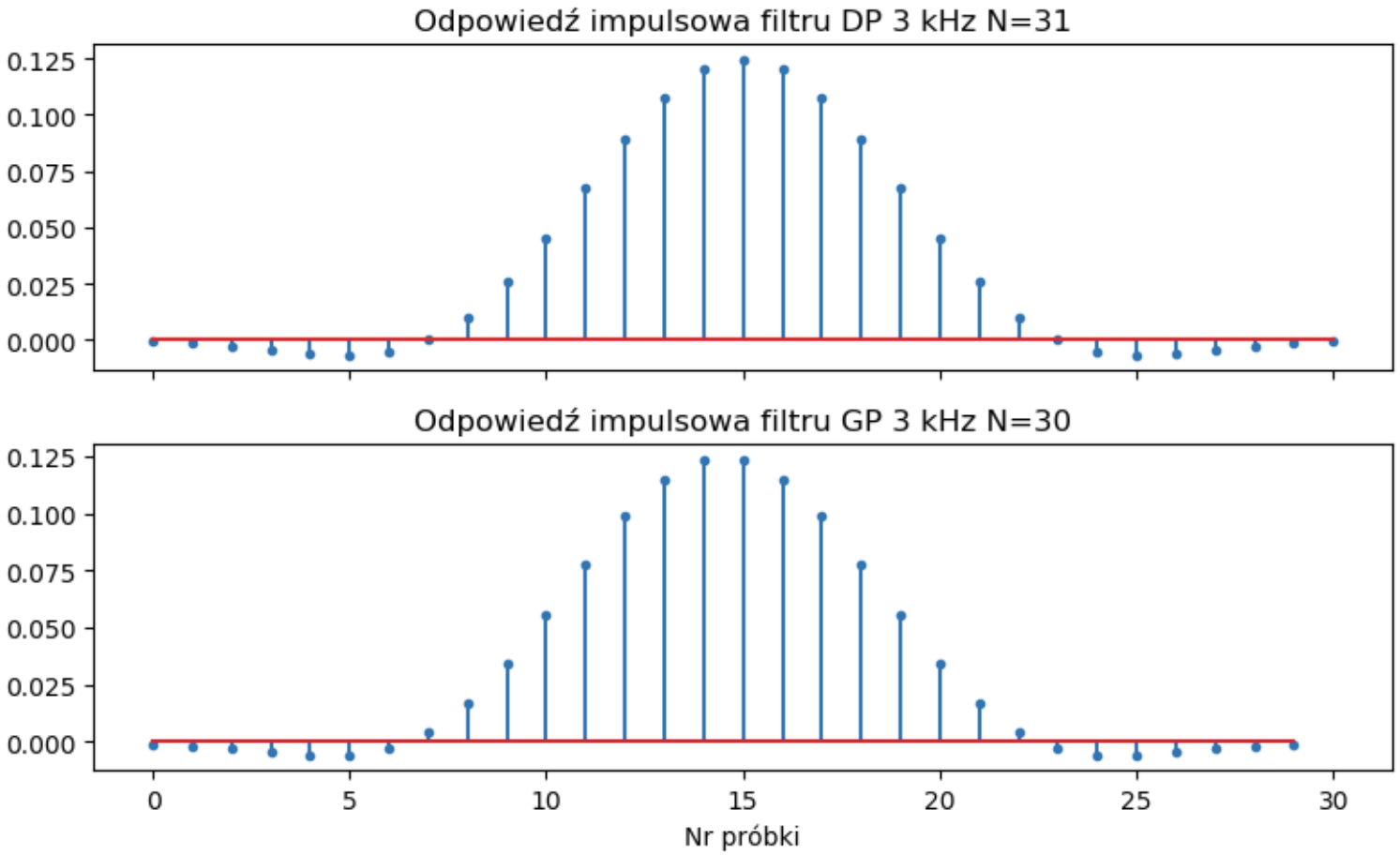
Porównanie odpowiedzi impulsowych PP i PZ



Projektując filtr w ten sposób możemy różnie dobrać długość filtru *N*.

- Nieparzysta długość filtru *N*
  - filtr FIR typu pierwszego (I)
  - środkowa próbka wyznacza symetrię
  - możliwe wszystkie charakterystyki: DP, GP, PP, PZ.
- Parzysta długość filtru *N*
  - filtr FIR typu drugiego (II)
  - dwie symetryczne połowy
  - wzmocnienie dla cz. Nyquista musi być zerowe!
  - możliwe więc tylko filtry: DP i PP.

Odpowiedź impulsowa filtru typu I i II



Możliwe jest również odwrócenie znaku „lewej” części odpowiedzi impulsowej – powstają w ten sposób filtry antysymetryczne:

- typ III – nieparzysty
  - zerowe wzmocnienie dla cz. 0 i Nyquista
  - tylko filtry PP
- typ IV – parzysty
  - zerowe wzmocnienie dla częstotliwości 0
  - tylko filtry GP i PP

Typy III i IV są używane tylko do specjalnych przypadków (np. filtr Hilberta).

Typy filtrów FIR zebrane razem:

Typ	Symetria	Długość	DP	GP	PP	PZ
I	symetr.	nieparzysta	+	+	+	+
II	symetr.	parzysta	+	–	+	–
III	asym.	nieparzysta	–	–	+	–
IV	asym.	parzysta	–	+	+	–

- Najczęściej korzysta się z typu I (uniwersalny).
- Filtr typu II jest trochę prostszy w implementacji (dwie symetryczne połowy) – wykorzystuje się czasem do filtrów DP i PP.
- Z typów III i IV nie korzysta się do typowych filtrów.

Normalizacja wzmocnienia filtru

- Zwykle chcemy aby wzmocnienie filtru w paśmie przepustowym było równe 1.
- Wymagana jest więc normalizacja wzmocnienia.
- Dla filtru DP sprawa jest prosta:
  - możemy wybrać do normalizacji częstotliwość 0,
  - wzmocnienie na cz. 0 jest równe sumie współczynników odpowiedzi impulsowej,
  - zatem dzielimy każdy współczynnik przez sumę wszystkich współczynników.

Normalizacja wzmocnienia filtru

- Dla filtru GP wybieramy częstotliwość Nyquista:

$$s = \sum_{n=-M}^{M} \left(h[n] \cos\left(\pi n \right) \right)$$

- Dla filtrów PP i PZ wybieramy częstotliwość środkową f – średnią dolnej i górnej cz. granicznej.

$$s = \sum_{n=-M}^{M} \left(h[n] \exp\left(j 2\pi n \frac{f}{f_S} \right) \right)$$

- Dzielimy współczynniki przez s.

Optymalne metody projektowania filtrów

- Metoda okienkowa jest prostą i działającą metodą projektowania filtrów, ale nie jest optymalna.
- „Optymalny” oznacza „najlepszy z możliwych”.
- W naszym przypadku „optymalny” oznacza zaprojektowaną charakterystykę H(*f*), która jest możliwie najbliższa idealnej charakterystyce D(*f*).
- Optymalizacja jest przeprowadzana za pomocą skomplikowanych algorytmów matematycznych.

Metoda najmniejszych kwadratów

(*least squares*, LS, LSQ)

- Dla zaprojektowanej charakterystyki H(*f*) i idealnej charakterystyki D(*f*), mamy funkcję błędu:

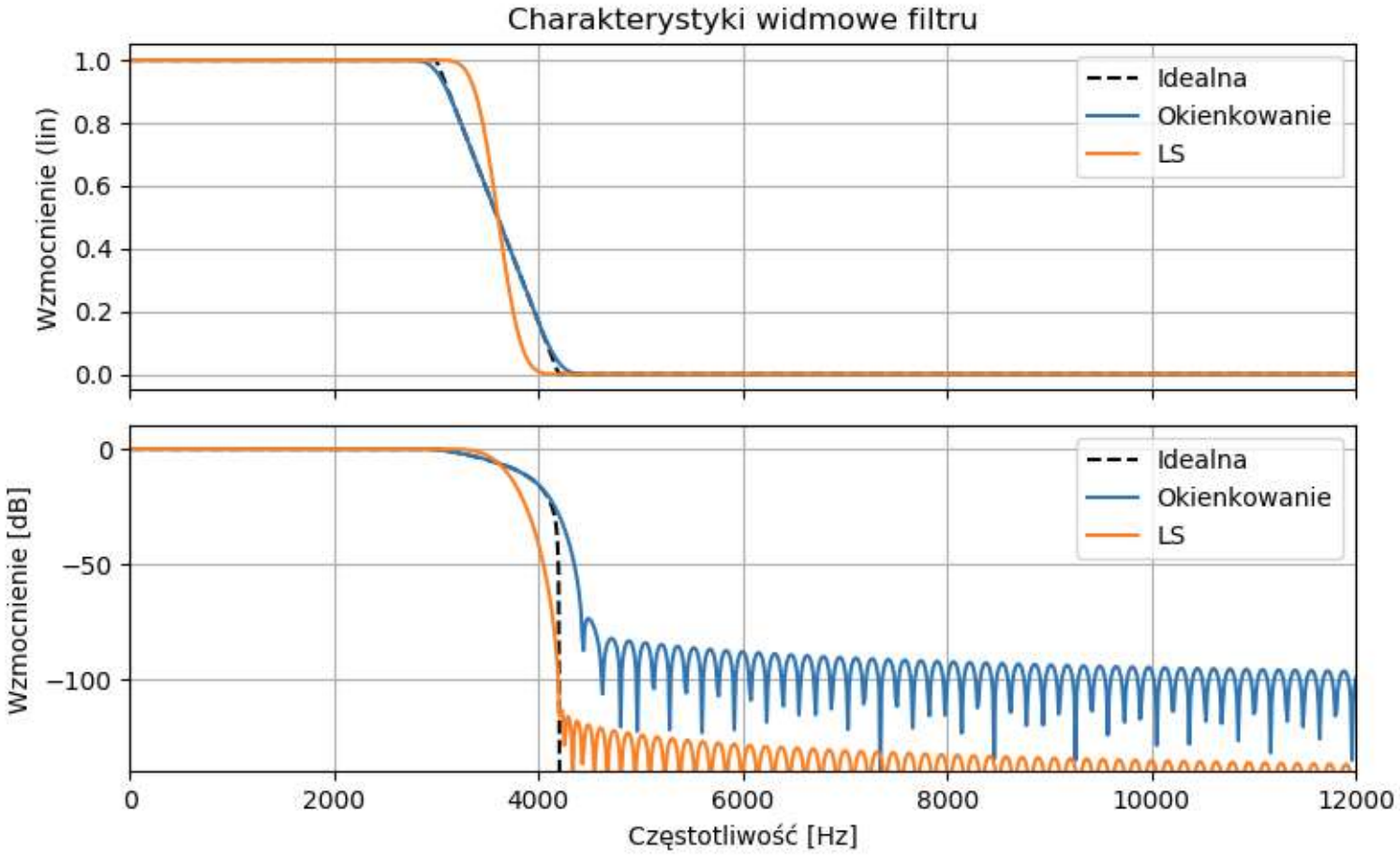
$$E = \sum_{i=0}^{n} w_i \left(\left| D(f_i) \right| - \left| H(f_i) \right| \right)^2$$

- Algorytm minimalizuje funkcję E – znajduje zbiór współczynników dający jak najmniejszy błąd.
- Obliczenia są wykonywane za pomocą operacji na macierzach (nie iteracyjnie).

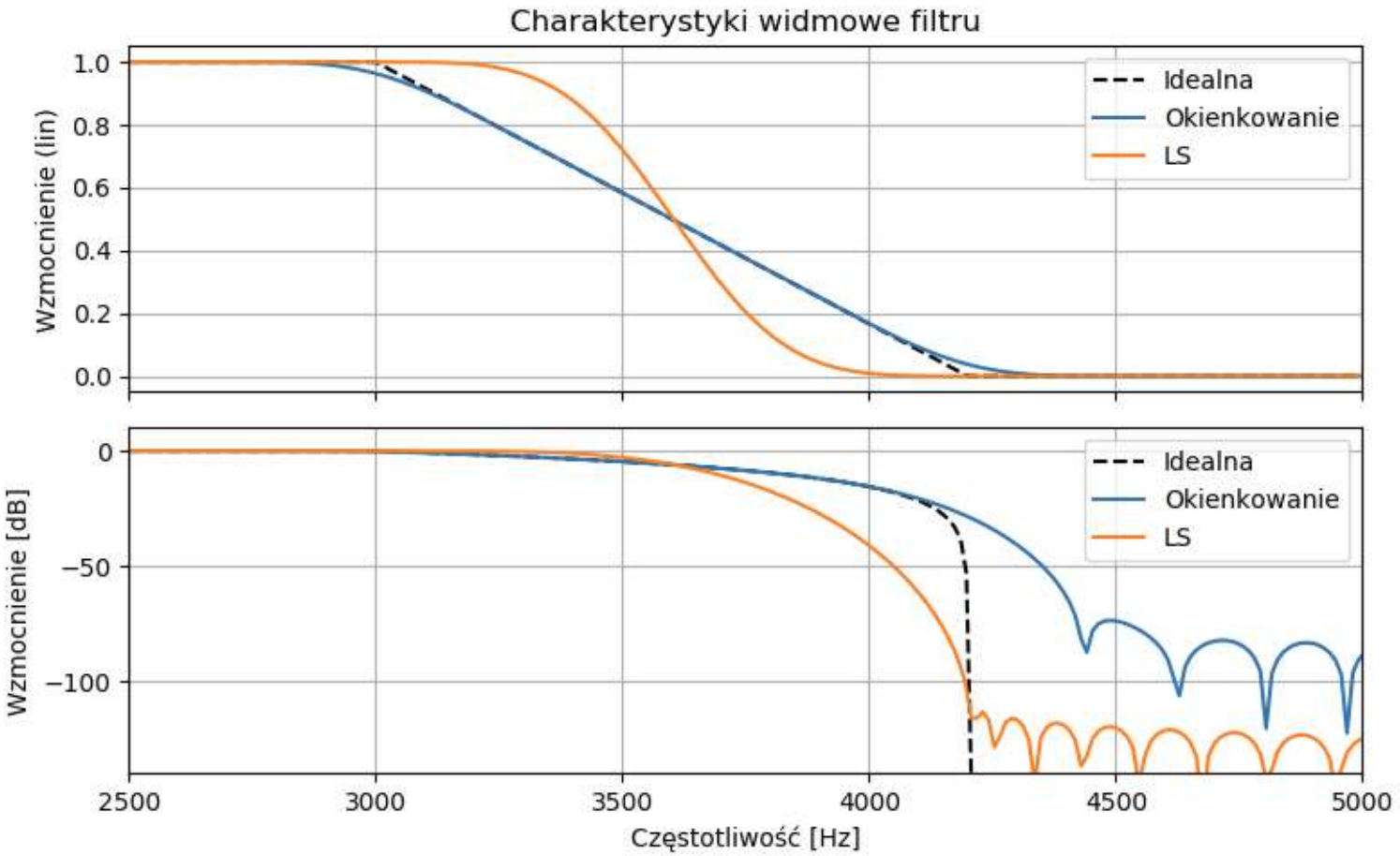
Metoda najmniejszych kwadratów

- Podajemy skrajne częstotliwości pasm przepustowych i zaporowych oraz wzmocnienie w każdym z pasm.
- Możliwe jest nadanie wag poszczególnym zakresom częstotliwości. Np. większa waga dla pasma zaporowego = dopuszczamy mniejsze błędy w tym zakresie.
- Algorytm dopasowuje charakterystykę do zadanych parametrów.
- W pasmach przejściowych kształt charakterystyki jest nieokreślony („jak wyjdzie”).

Porównanie metody LS i okienkowania
filtr DP *N*=301, pasmo przejściowe 3-4,2 kHz



Powiększenie pasma przejściowego



- Metoda LS stara się objąć pełne pasma przepustowe i zaporowe.
- Efektem jest „przeciąganie” charakterystyki na pasmo przejściowe (można skorygować częstotliwości graniczne).
- Większa długość filtru daje większe tłumienie w paśmie zaporowym i bardziej strome opadanie charakterystyki w paśmie przejściowym.
- Wadą filtrów LS są nierównomierne zafalowania w pasmach zaporowych i przepustowych.

Metoda Parksa-McClellana

nazywana też *Remez* (niepoprawnie, ale prościej zapamiętać)

- Algorytm iteracyjny.
- Także stara się dopasować do idealnej charakteryst.
- Oblicza współczynniki stosując aproksymację Czebyszewa (algorytm Remeza).
- W kolejnych iteracjach koryguje współczynniki tak, aby zminimalizować maksymalny błąd.

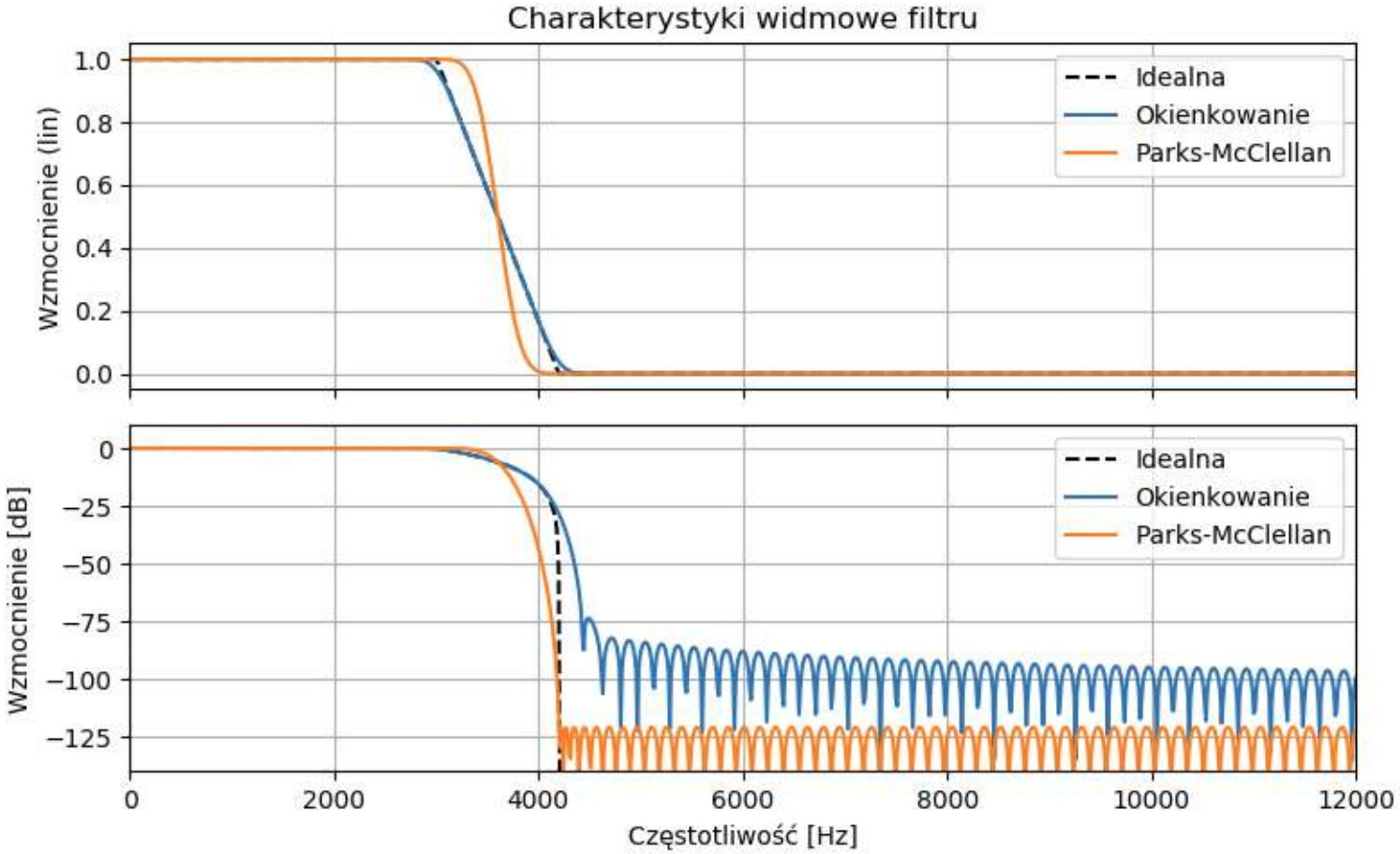
$$\min_{h(n)} E = \min \left\{ \max_{i} \left[w_i \left(D(f_i) - H(f_i) \right) \right] \right\}$$

- Algorytm kończy działanie gdy kolejne iteracje nie zmniejszają już błędu *E*.

Metoda Parksa-McClellana

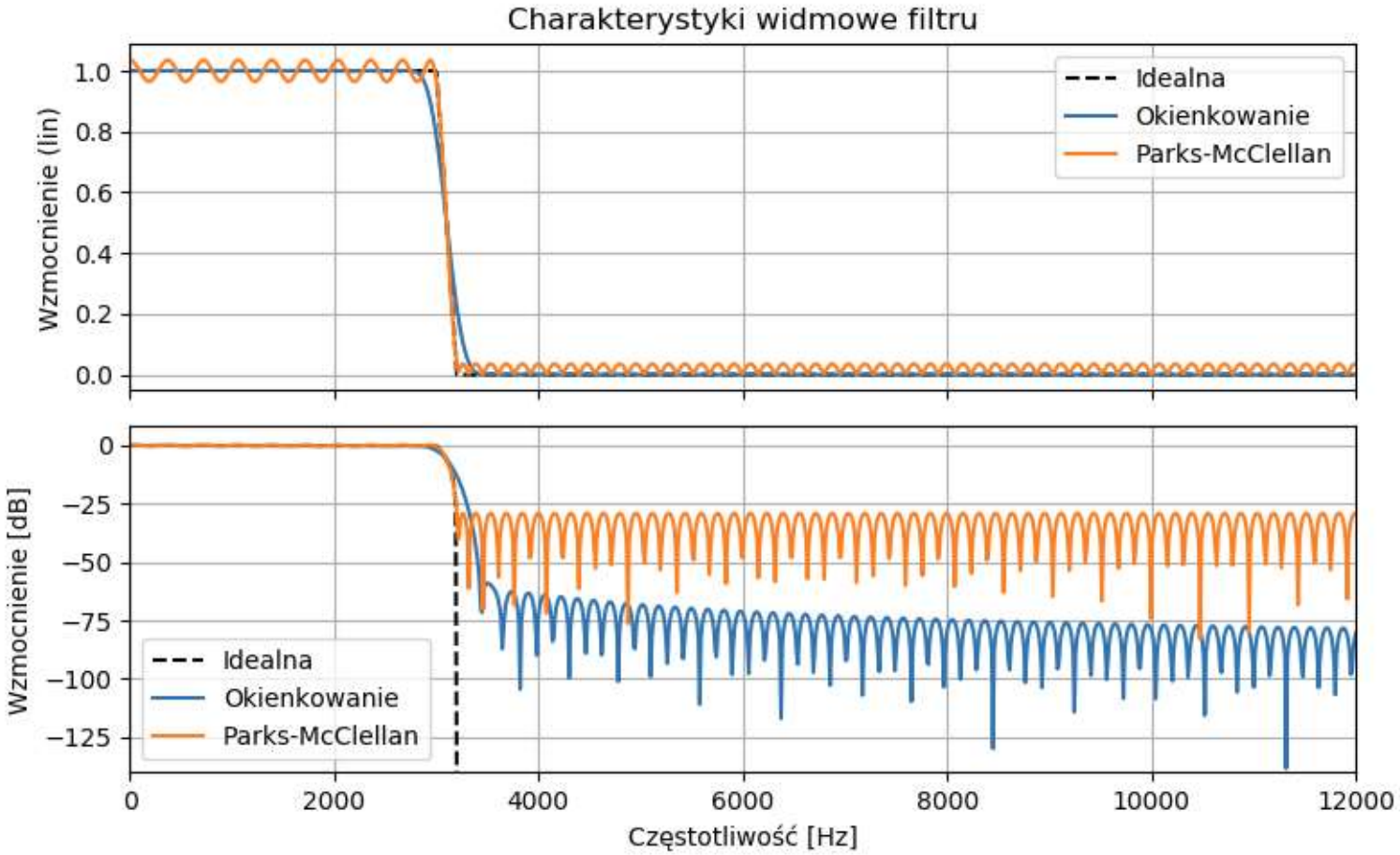
- Założenia projektowe są identyczne, jak dla metody LS – częstotliwości graniczne i wzmocnienia pasm, ewentualnie wagi dla poszczególnych pasm.
- Algorytm jest wrażliwy na dobór parametrów początkowych. W niektórych przypadkach nie jest w stanie uzyskać zbieżności i otrzymujemy błąd zamiast wyniku. Trzeba skorygować parametry.
- Algorytm opracowany w 1972 r. stał się standardem w projektowaniu filtrów FIR za pomocą programów komputerowych.
- Jest wolny (co nie ma praktycznego znaczenia).

Porównanie metody P-M i okienkowania
filtr DP *N*=301, pasmo przejściowe 3-4,2 kHz



- Podobnie jak w metodzie LS, metoda P-M dopasowuje się do pasm przepustowych i zaporowych. Pasma przejściowe są nieokreślone.
- Również „przeciągane” są pasma przejściowe.
- Tłumienie w paśmie zaporowym wynika z długości filtru i szerokości pasma przejściowego.
- Różnica w porównaniu z LS: poziom zafalowań jest stały dla wszystkich częstotliwości, we wszystkich pasmach przepustowych i zaporowych.
- Z tego względu, metodę P-M często nazywa się metodą projektowania filtrów o równomiernych zafalowaniach – *equiripple*.

Przykład dla zbyt wąskiego pasma przejściowego (3-3,2 kHz). Filtr *N*=301 nie jest w stanie zapewnić dobrego tłumienia. Trzeba zwiększyć długość filtru.



Podsumowanie metod optymalizacyjnych:

- Metoda okienkowania zwykle zaczyna tłumić „za wcześnie” i osiąga pasmo zaporowe „za późno”.
- Metody optymalizacyjne (LS, P-M) zapewniają, że pasma przepustowe i zaporowe są zgodne z zadanymi częstotliwościami.
- Charakterystyka w paśmie przepustowym nie jest określona – nie mamy na nią wpływu.
- W metodach optymalizacyjnych musimy zapewnić dostatecznie szerokie pasmo przejściowe w odniesieniu do długości filtru, aby uzyskać dobre tłumienie w paśmie zaporowym.

Uwagi o częstotliwościach

- Projektując filtry posługujemy się zwykle częstotliwościami w Hz.
- Dla filtru nie ma znaczenia częstotliwość w Hz. Istotna jest pulsacja (od 0 do 2π), liczona względem częstotliwości próbkowania (odpowiada 2π).

$$\omega = 2\pi \frac{f_c}{f_S}$$

- Często podaje się pulsację w formie ($x \cdot \pi$).
- Często pomija się π, podając tylko liczbę od 0 do 1, gdzie 1 oznacza częstotliwość Nyquista.

Uwagi o częstotliwościach

- Inną konwencją jest częstotliwość unormowana:

$$f_{cn} = \frac{f_c}{f_S}$$

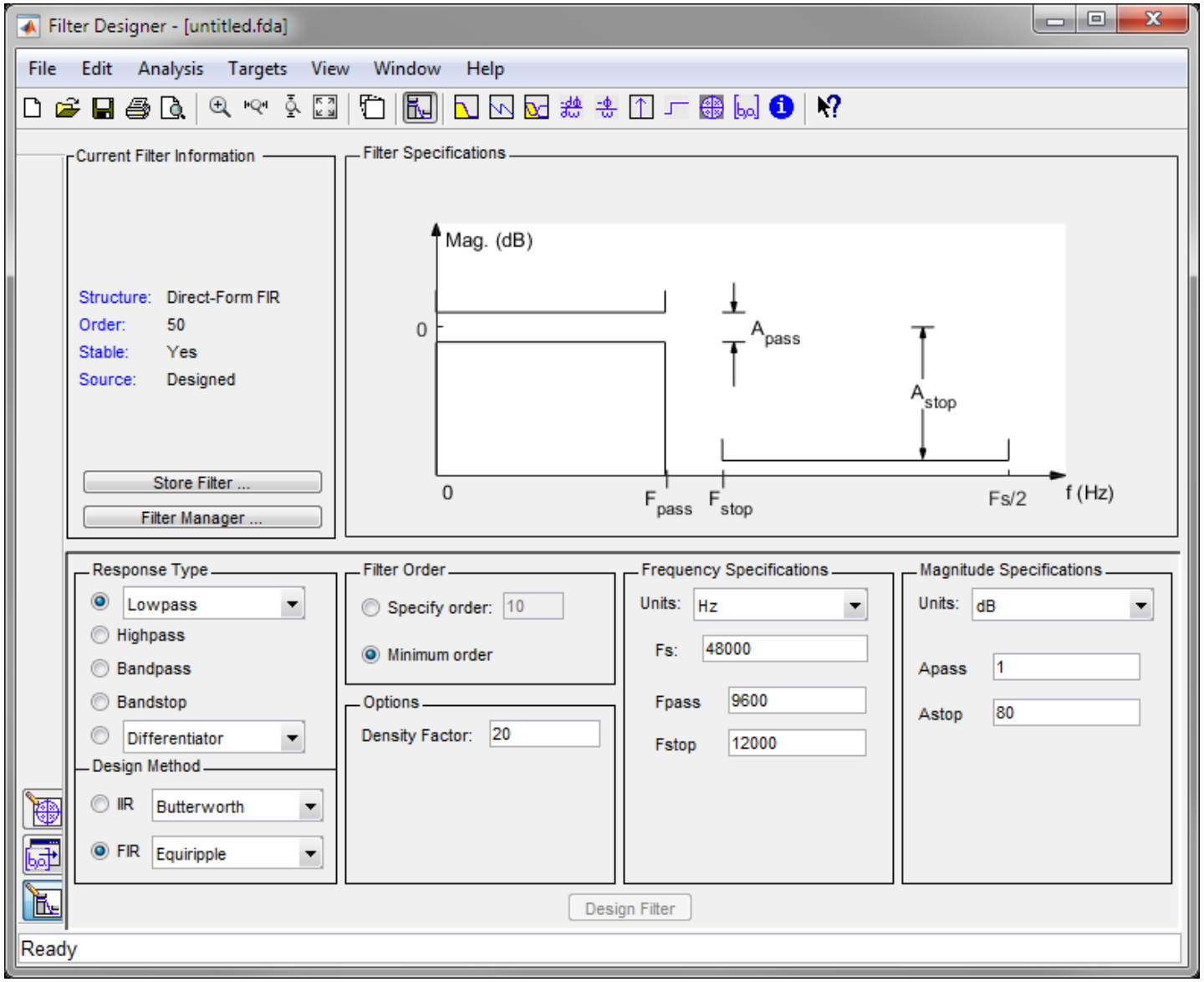
- Częstotliwość unormowana (bez jednostki) przyjmuje wartości od 0 do 1, gdzie 1 oznacza częstotliwość próbkowania.
- Możemy stosować wartości od 0 do 0,5, 0,5 oznacza częstotliwość Nyquista.

Komputerowe projektowanie filtrów FIR

Narzędzia do projektowania filtrów:

- programy z interfejsem GUI – najczęściej komercyjne, wygodne projektowanie,
- funkcje dostępne w językach programowania – duża elastyczność,
- oprogramowanie online w Internecie – zwykle kiepska jakość i skomplikowane interfejsy,
- metodę okienkowania można zaimplementować samodzielnie.

fdatool – Matlab + Signal Processing Toolbox



Pokażemy przykłady projektowania filtrów FIR
za pomocą darmowych narzędzi
– języka *Python* z modułami *SciPy* + *NumPy*.

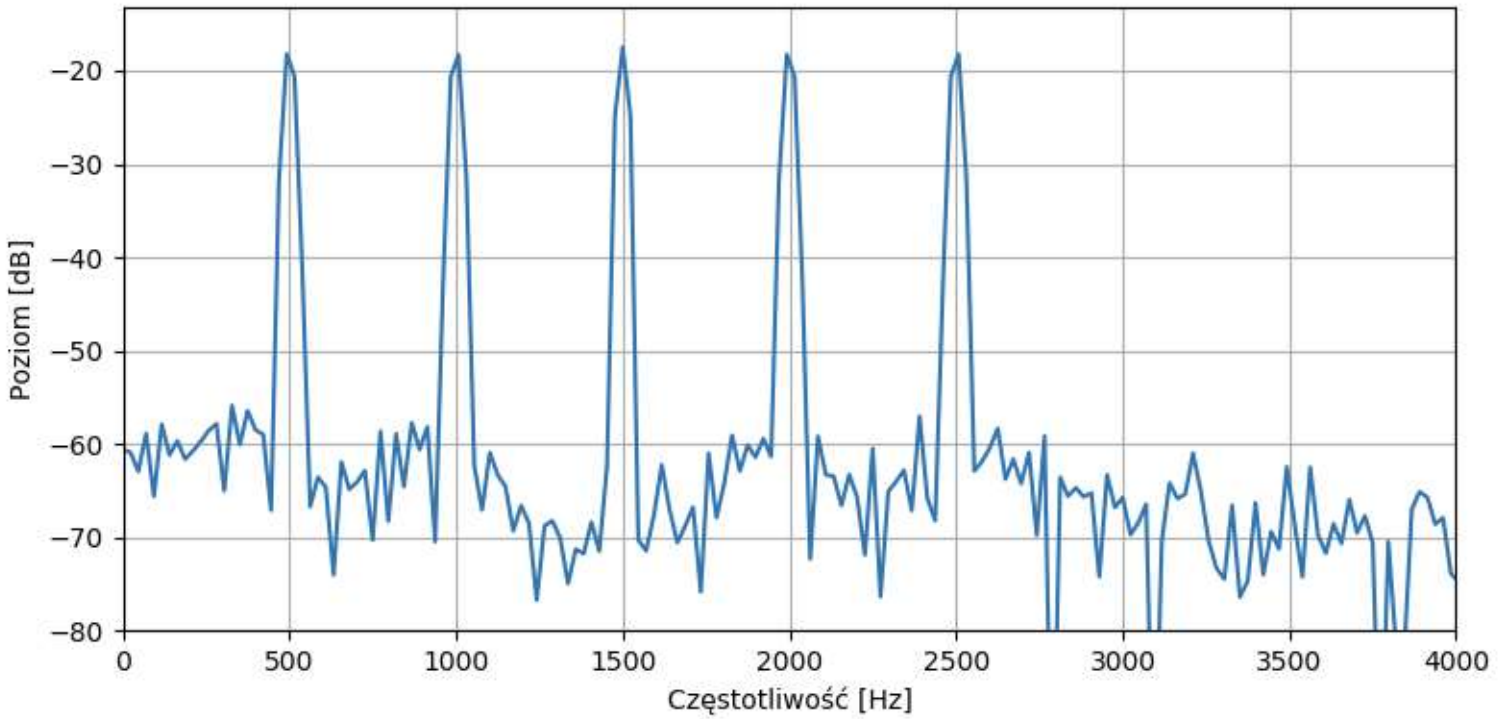
Dokumentacja:
https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/signal.html

Wszystkie przykłady zakładają, że wcześniej wykonano instrukcje:

```
import numpy as np
import scipy.signal as sig
```

Częstotliwość próbkowania = 48 kHz

Sygnał testowy – suma pięciu „sinusów” + szum, częstotliwości: 500, 1000, 1500, 2000, 2500 Hz



Projekt 1. Chcemy usunąć pierwsze dwa sinusy.

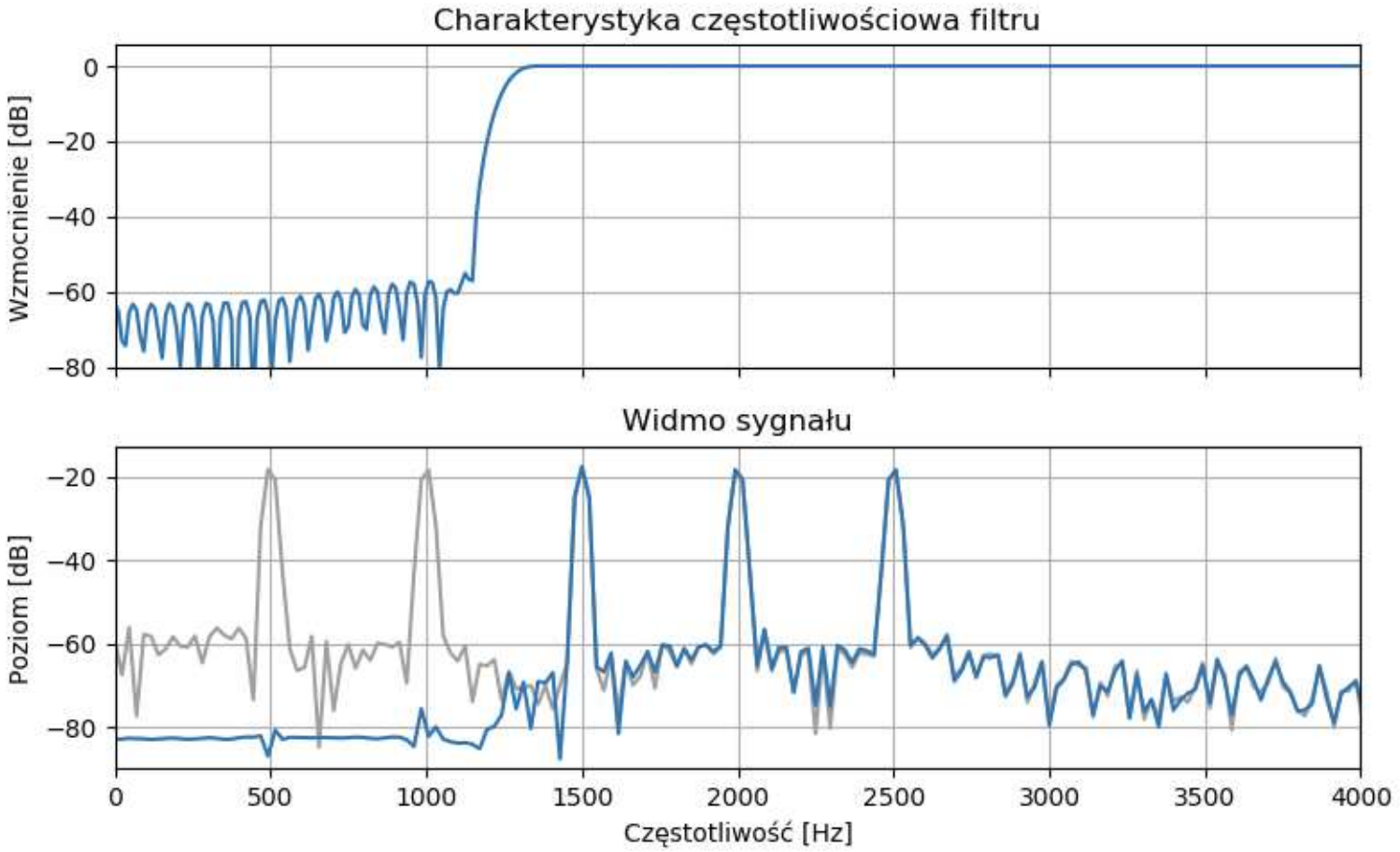
- filtr górnoprzepustowy
- częstotliwość graniczna = 1250 Hz
- zakładamy szerokość pasma przejściowego = 200 Hz
- stosujemy okno Hamminga – szacunkowa minimalna długość = 3,3 * (48000 / 200) = 792
- wybieramy długość *N* = 801 (z zapasem)
  (pamiętajmy: dla GP musi być nieparzysta)

Stosujemy procedurę okienkowania, z obliczaniem odpowiedzi impulsowej w dziedzinie czasu.

```
h1 = sig.firwin(801, 1250, window='hamming’,
                pass_zero='highpass', fs=48000)
```

- długość filtru (801)
- częstotliwość graniczna (1250)
- typ okna ('hamming')
- typ charakterystyki ('highpass' = GP)
- częstotliwość próbkowania (48000)

Projekt 1 – wynik

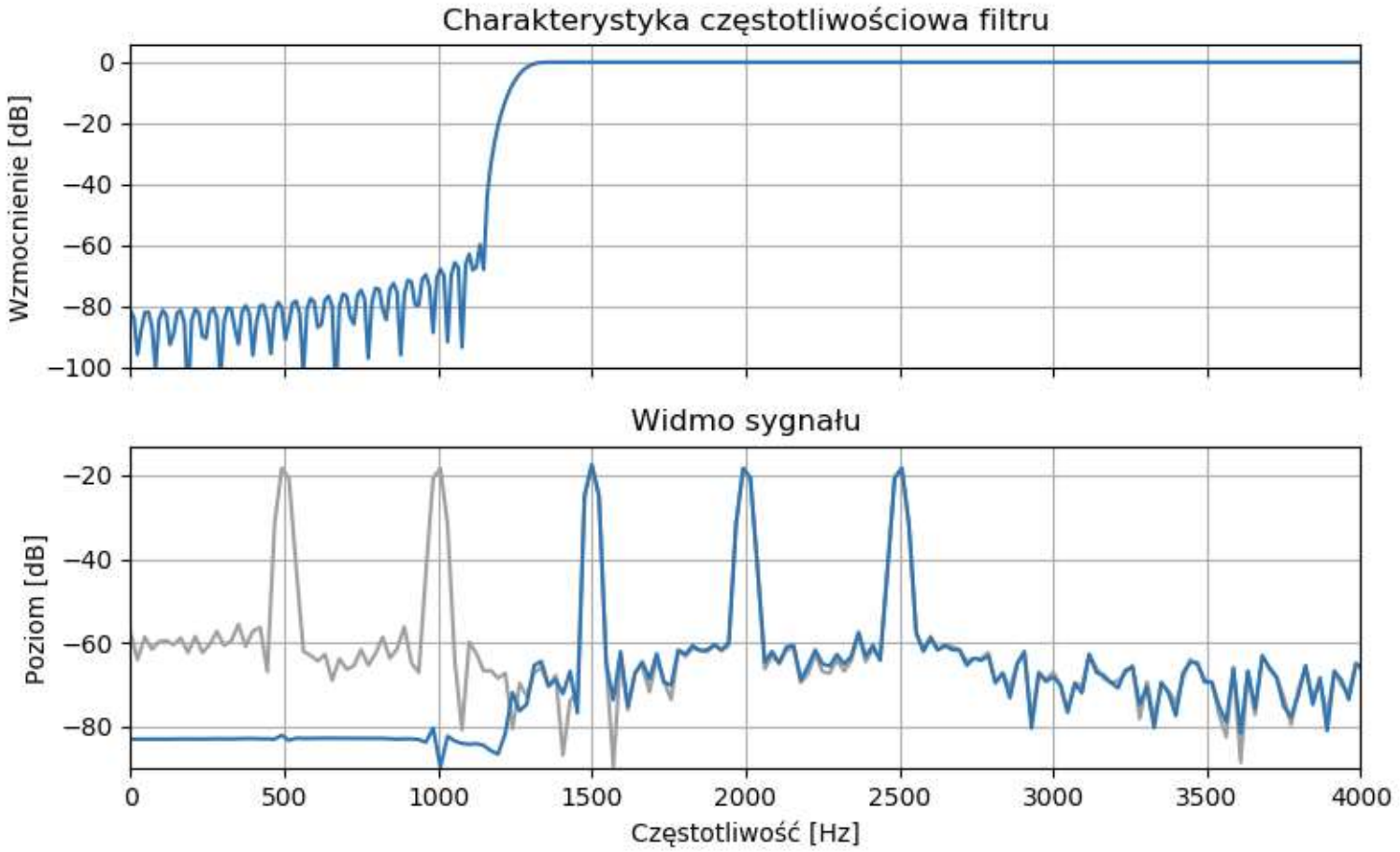


Projekt 1a – to samo, ale wykorzystamy okno Kaisera.

- Szerokość pasma przejściowego: 200 Hz, jak poprzednio.
- Minimalne tłumienie: 60 dB.

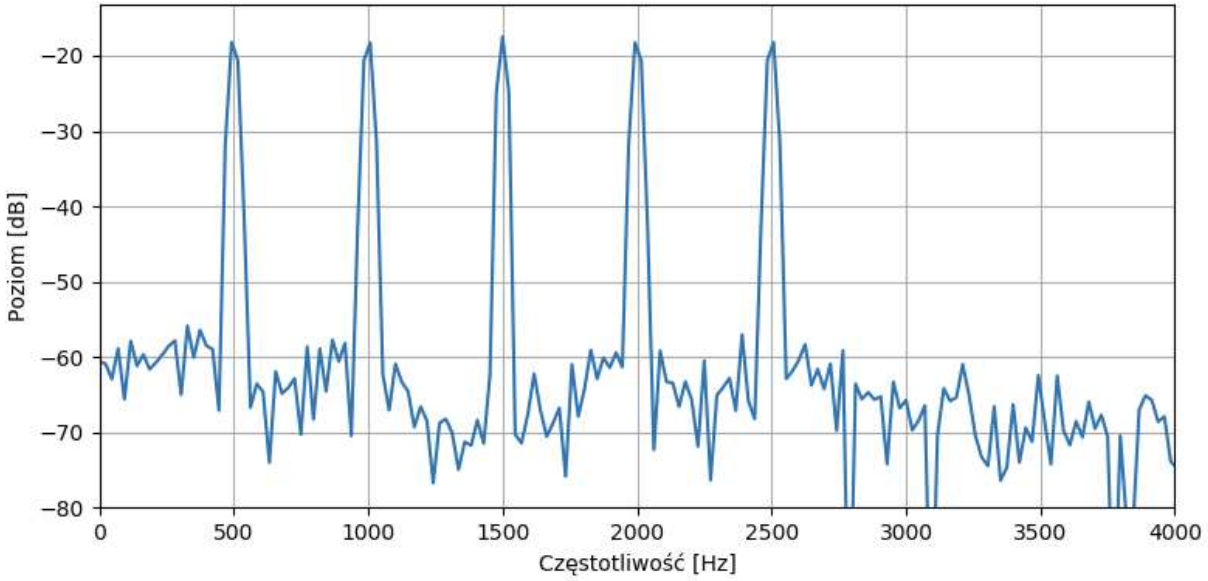
```
# musimy znormalizować szerokość pasma
nk, beta = sig.kaiserord(60, 2 * 200 / 48000)
if nk % 2 == 0:
    nk += 1  # dla GP długość musi być nieparzysta
# nk=873, beta=5.65326

h1a = sig.firwin(nk, 1250, window=('kaiser', beta),
                 pass_zero='highpass', fs=48000)
```

Projekt 1a - wynik



Projekt 2 – zostawiamy tylko drugi i trzeci sinus.

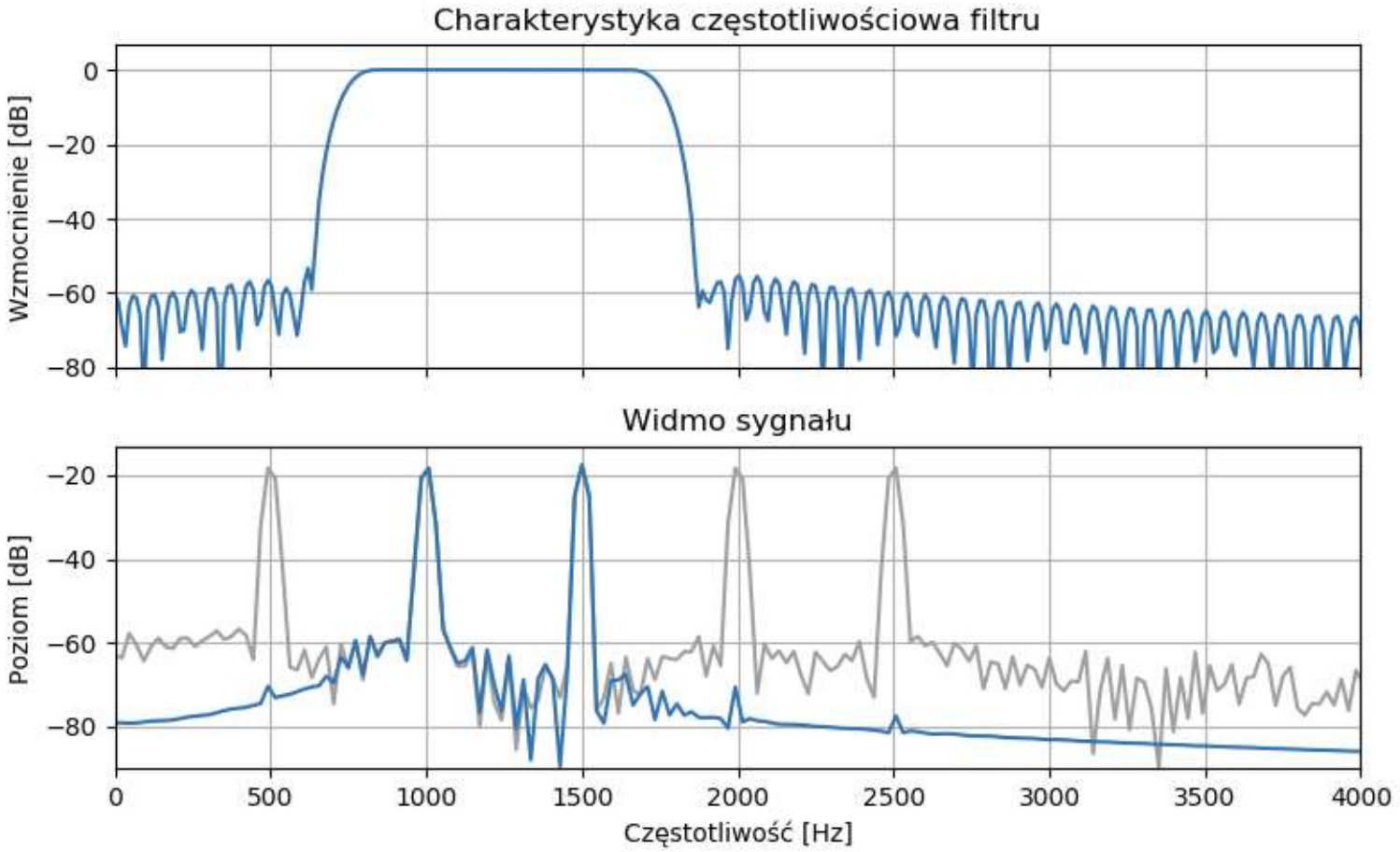
- Filtr pasmowo-przepustowy
- Częstotliwości graniczne: 750 Hz, 1750 Hz
- Szerokość pasma przejściowego: 20 Hz
- Stosujemy to samo okno: Hamminga, $N = 801$



- Tym razem zastosujemy metodę okienkowania z obliczaniem w dziedzinie częstotliwości.
- Zakładamy idealną charakterystykę widmową:
  - częstotliwości graniczne pasm przepustowych i zaporowych:
    0, 730, 750, 1750, 1770, 24000
  - wzmocnienia filtru na tych częstotliwościach:
    0, 0, 1, 1, 0, 0

```
h2 = sig.firwin2(801, (0, 730, 750, 1750, 1770, 24000),
                      (0,   0,   1,    1,    0,     0),
                 window='hamming', fs=48000)
```

Projekt 2 – wynik



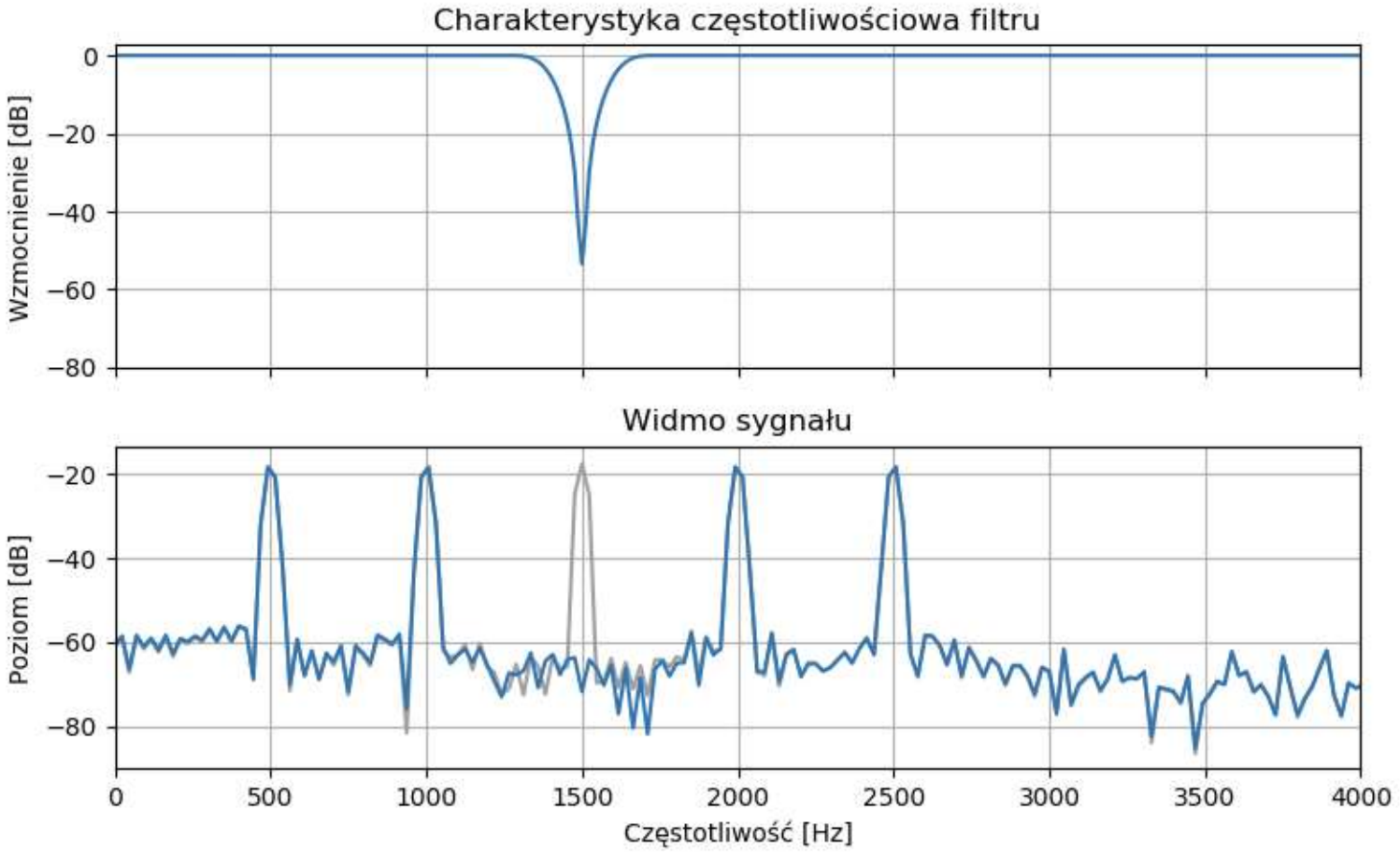
Projekt 3 – usunięcie środkowego sinusa

- Filtr pasmowo-zaporowy typu *notch*
- Cz. graniczna 1500 Hz, p. przejściowe 200 Hz.
- Zastosujemy metodę najmniejszych kwadratów.
- Sposób definiowania charakterystyki
  – taki sam jak w projekcie 2.

```
h3 = sig.firls(801, (0, 1290, 1490, 1510, 1710, 24000),
                    (1,    1,    0,    0,    1,     1),
     fs=48000)
```

Projekt 3 – wynik

Jeżeli chcemy większe tłumienie, musimy zwiększyć długość filtru i/lub poszerzyć pasmo przejściowe.

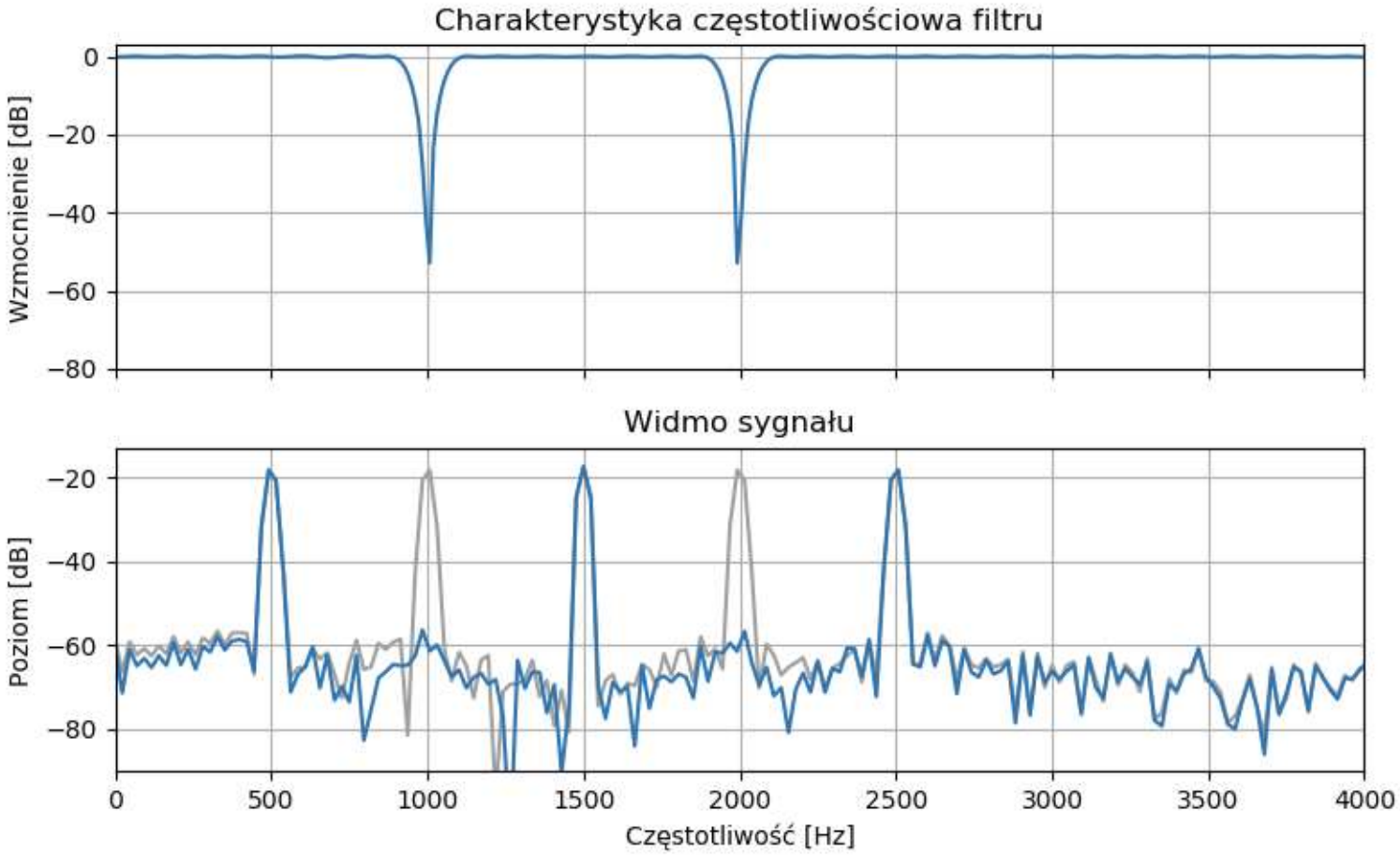


Projekt 4 – usuwamy drugi i czwarty sinus, korzystając z metody Parksa-McClellana („Remez”)

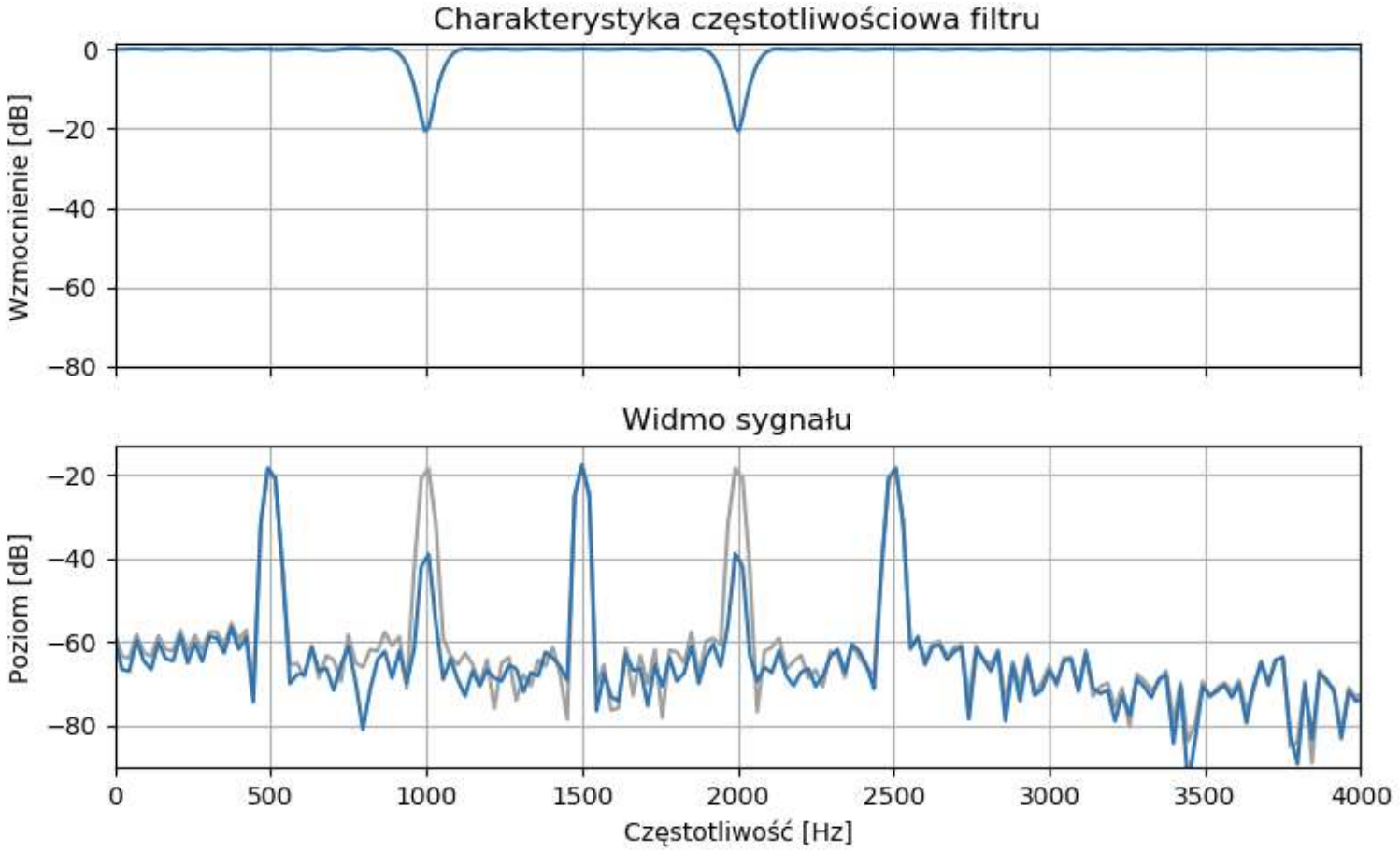
- Projektujemy filtr podając częstotliwości graniczne pasm oraz wzmocnienia – jedno na każde pasmo.
- Redukujemy pasma przejściowe do 100 Hz
  (dla 200 Hz algorytm nie uzyskał zbieżności).

```
h4 = sig.remez(801,
    (0, 890, 990, 1010, 1110, 1890, 1990, 2010, 2110, 24000),
    (     1,          0,           1,           0,            1),
    fs=48000)
```

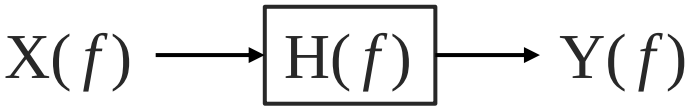
Projekt 4 - wynik



Projekt 4a: nie usuwamy sinusów, ale tłumimy je o 20 dB (współczynniki: [1, 0.1, 1, 0.1, 1])



Operacja filtracji FIR filtrem o transmitancji *H*:



$$Y(f) = H(f) \cdot X(f)$$

Filtr FIR jest układem LTI:

- jest liniowy,
- odpowiedź impulsowa jest stała w czasie.

A zatem w dziedzinie czasu:

$$y[n] = h[n] * x[n]$$

A więc: filtracja FIR jest operacją splotu liniowego współczynników filtru z próbkami sygnału.

Sytuacja praktyczna: filtr operuje na sygnale ciągłym, teoretycznie nieskończonym (np. dźwięk z mikrofonu).

Możliwe podejścia:

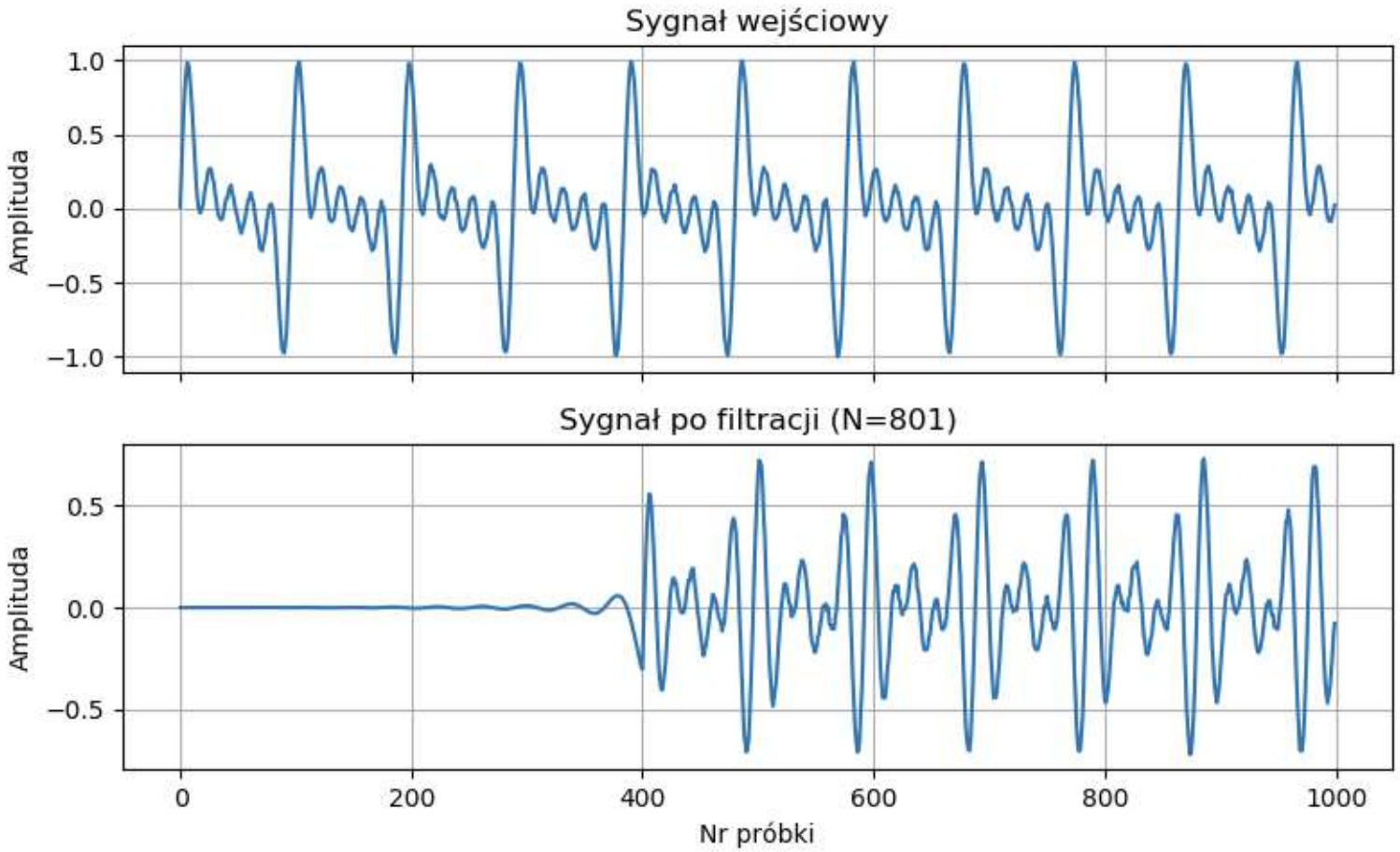
- przetwarzanie sygnału próbka po próbce
  - minimalizacja opóźnień
- przetwarzanie blokowe – zebranie bloku próbek, przetworzenie całego bloku naraz
  - zwiększa opóźnienie (np. blok 1024 próbek dla f_S= 48 kHz: opóźnienie 21,3 ms),
  - ale daje możliwość bardziej wydajnej filtracji.

O czym trzeba pamiętać:

- włączamy się z filtracją w pewnym momencie,
- wcześniej istniały pewne próbki sygnału (nie mamy ich),
- filtr zakłada, że wcześniej w sygnale były zera (co zazwyczaj nie jest prawdą),
- zatem pierwsze (N-1)/2 wyniki filtracji (dla filtru liniowofazowego) są błędne (nie ma wystarczających danych),
- tworzą one stan nieustalony (*transient*) filtru,
- wyniki te powinniśmy odrzucić.

Ilustracja stanu nieustalonego filtru:

filtr GP, długość 801 – stan nieustalony trwa 400 próbek



Skoro filtracja FIR jest splotem, to możemy wykonać ją w dziedzinie częstotliwości:

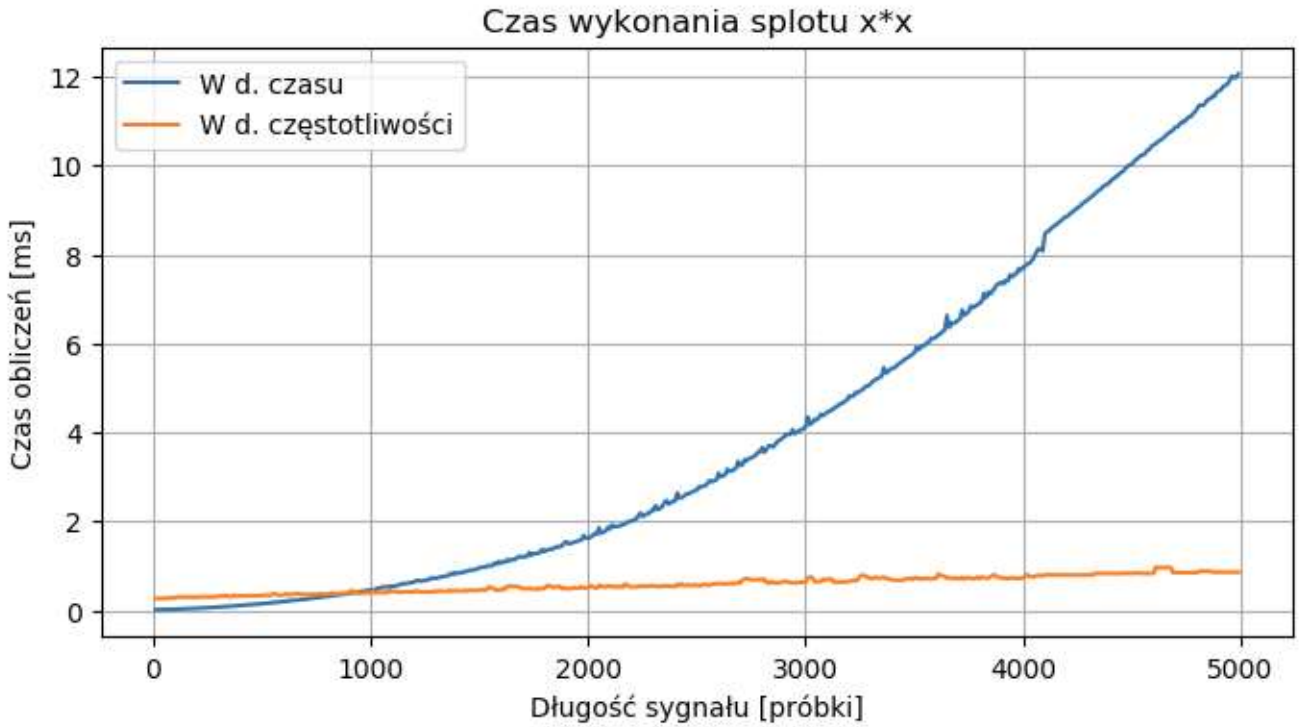
- obliczyć transmitancję filtru (FFT na współczynnikach),
- obliczyć widmo bloku próbek (FFT),
- przemnożyć je przez siebie,
- wykonać odwrotne przekształcenie Fouriera (IFFT),
- mamy wynik splotu / filtracji.

- Jeżeli po prostu przemnożymy transformaty, otrzymamy wynik splotu kołowego – wyniki zawiną się i dodadzą się do siebie. Nie o to chodzi.
- Filtracja FIR jest splotem liniowym.
- Splot liniowy sygnałów o długościach L, M daje wynik o długości $L+M-1$.
- Aby wykonać splot liniowy, musimy uzupełnić zerami blok próbek i blok współczynników do długości co najmniej $L+M-1$, przed obliczeniem transformaty.

Po co robić splot „na około”? Czy tak będzie szybciej?

Czas splotu sygnału *x* z samym sobą, obie metody

(obliczone za pomocą *scipy.signal.choose_conv_method*)



- Ze wzrostem długości sygnału, czas wykonania splotu rośnie w przybliżeniu:
  - wykładniczo dla splotu w dziedzinie czasu,
  - liniowo dla splotu w dziedzinie częstotliwości.
- Jedynie dla małych długości (<500) splot w dziedzinie czasu jest wyraźnie szybszy.
- Dla większych długości (>1000): splot w dziedzinie częstotliwości jest szybszy, różnica rośnie ze wzrostem długości sygnału.
- Splot w dziedzinie częstotliwości nazywa się szybkim splotem (*fast convolution, FFT convolution*)

Uwagi o filtracji FFT w dziedzinie częstotliwości

- Transformatę współczynników filtru wystarczy obliczyć tylko jeden raz – nie zmienia się.
- Czas wykonania szybkiego splotu zależy od wydajności algorytmu FFT:
  - niektóre implementacje wymagają, aby długość transformaty była potęgą dwójki,
  - w większości współczesnych implementacji FFT zaleca się, aby długość transformaty była iloczynem niskich liczb pierwszych (2, 3, 5, 7).

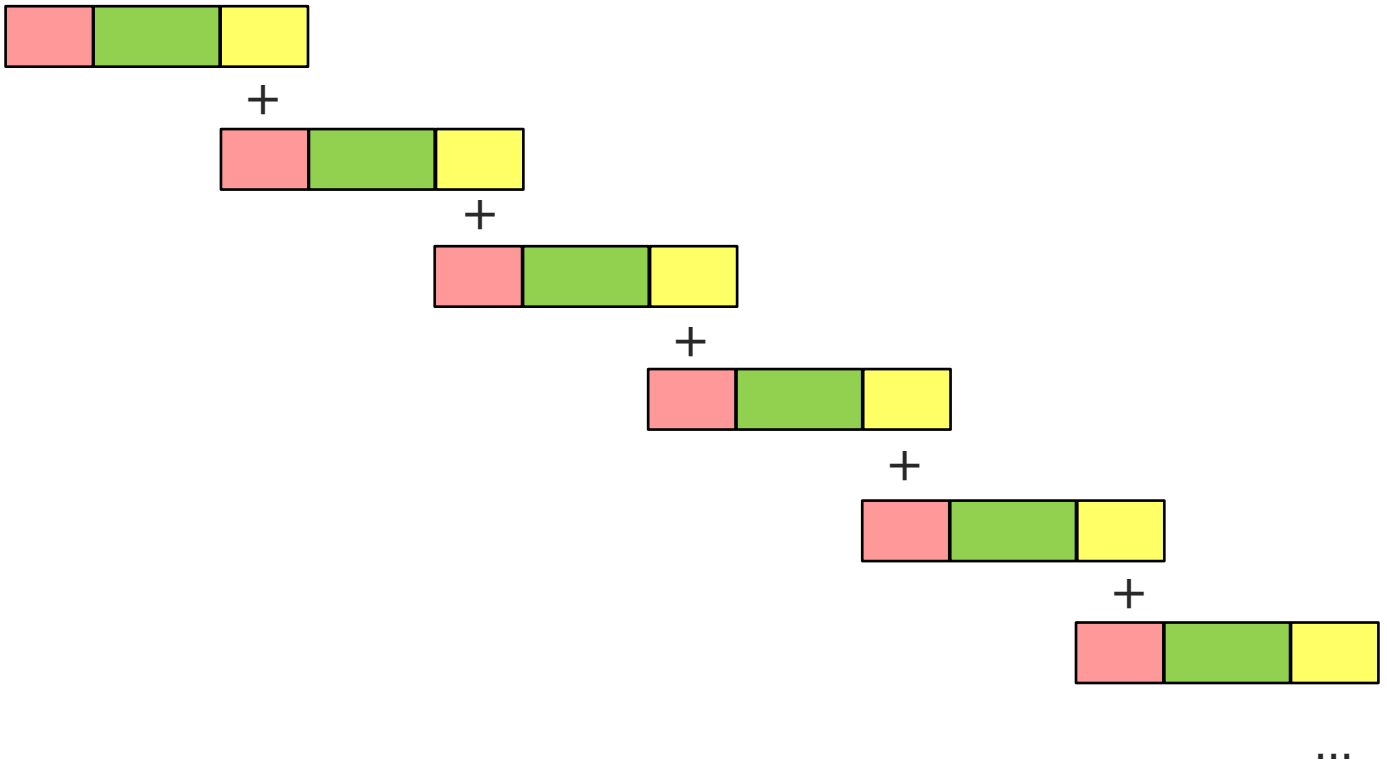
Przykład praktyczny:

- przetwarzamy bloki próbek o długości L=1024
- filtr ma długość M, rozmiar splatanych bloków musi mieć długość $N = L+M-1$
- przyjmijmy $N = 2048 = 2^{11}$ (dla wygody FFT)
- wtedy $M = N–L+1 = 1025$
  (długość filtru jest nieparzysta – to dobrze)
- każdy blok 1024 próbek uzupełniamy 1024 zerami, liczymy FFT, mnożymy przez transformatę współczynników, liczymy IFFT
- dostajemy 2048 próbek wyniku i … co dalej?

- Na wejściu mamy L próbek, na wyjściu musi być tyle samo próbek (L).
- Dostajemy $L+M-1$ wyników. Co zrobić z nadmiarowymi wynikami? Odrzucić?
- Załóżmy, że przetwarzamy któryś z kolei blok.

- Pierwsze $M-1$ wyniki (czerwone) są błędne – stan nieustalony filtru.
- Kolejne $L-M+1$ wyniki (zielone) są poprawne.
- Ostatnie $M-1$ wyniki (żółte) – co z nimi zrobić?

Rozwiązanie problemu jest proste: do pierwszych *M*-1 próbek wyniku (stan nieustalony) dodajemy „nadmiarowe” *M*-1 próbki z poprzedniego bloku, pierwsze *L* próbki wyniku wysyłamy na wyjście.



Schemat postępowania:

1. Pobierz blok L próbek z wejścia, uzupełnij zerami do długości $N \geq L+M-1$, oblicz FFT.
2. Przemnóż przez transformatę współczynników filtru.
3. Oblicz IFFT wyniku mnożenia.
4. Do pierwszych M-1 wartości wyniku dodaj zawartość bufora.
5. Wyślij pierwsze L wartości wyniku na wyjście.
6. Zapisz pozostałe M-1 wartości do bufora.
7. GOTO 1.

- Opisana metoda splotu blokowego sygnału nosi nazwę *overlap-add* (OLA)
  - zakładkowanie z dodawaniem.
- Umożliwia ona filtrację ciągłych bloków próbek, w dziedzinie częstotliwości lub czasu.
- W porównaniu z filtracją „próbka po próbce”:
  - skracamy czas obliczeń (gdy *N* jest duże),
  - zwiększamy opóźnienie przetwarzania – musimy poczekać aż uzbiera się cały blok próbek, dopiero wtedy je przetwarzamy.

Istnieje alternatywna metoda: *overlap-save* (OLS)

- bloki próbek wejściowych pobieramy „na zakładkę” – przesuwamy okno o *L* próbek, *M*-1 próbek powtarza się w kolejnym bloku,
- obliczamy splot tak jak w OLA,
- odrzucamy cały stan nieustalony (*M*-1 próbek),
- resztę (*L* próbek) wysyłamy na wyjście.

Złożoność obliczeniowa metod OLA i OLS jest taka sama. Wybieramy metodę prostszą do implementacji w danym systemie.

PODSUMOWANIE – zalety filtrów FIR:

- bardzo prosty algorytm (splot liniowy),
- względnie łatwe projektowanie,
- typowe filtry mają liniową fazę, a więc stałe opóźnienie dla wszystkich częstotliwości, nie wprowadzają zniekształceń fazowych,
- zawsze są stabilne: jeżeli wyłączymy sygnał wejściowy, po pewnym czasie sygnał na wyjściu również stanie się zerowy,
- łatwe do implementacji w typowych systemach DSP.

PODSUMOWANIE – wady filtrów FIR:

- musimy stosować filtry o dużej długości aby zapewnić dobre tłumienie i wąskie pasmo przejściowe,
- dużo obliczeń dla „długich” filtrów (zalecane stosowanie szybkiego splotu),
- duża zajętość pamięci (współczynniki, bufor próbek),
- opóźnianie sygnału przez filtry – zwiększa się z długością filtru, może być odczuwalne, np. przy przetwarzaniu dźwięku.