Twierdzenie o próbkowaniu
H. Nyquist 1928, V.A. Kotielnikow 1933, J.M. Whittaker 1935, C.E. Shannon 1949

Ewa Hermanowicz

Próbkowanie sygnałów ciągłych

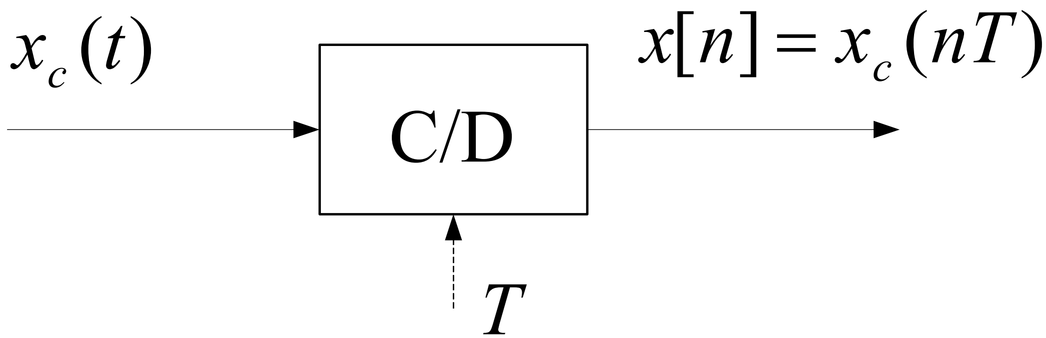
Próbkowanie okresowe (równomierne) sygnału $x_c(t)$

$$x[n] = x_c(nT) \qquad -\infty < n < \infty$$

T – okres próbkowania w sekundach

$F_p = 1/T$ – częstotliwość próbkowania w Hz

Schemat blokowy reprezentujący idealny przetwornik (konwerter) czasu ciągłego na czas dyskretny – jest to idealny system próbkujący.



Układ fizyczny może być zrealizowany na różne sposoby.

W ogólności operacja próbkowania nie jest odwracalna, tzn. nie zawsze można odtworzyć $x_c(t)$ na podstawie $x[n]$.

Aby zapewnić odwracalność, sygnał próbkowany $x_c(t)$ musi spełniać twierdzenie o próbkowaniu.

Twierdzenie Nyquista o próbkowaniu

Niech $x_c(t)$ będzie sygnałem o ograniczonym widmie, tzn.

$$X_c(j\Omega) = 0 \ \text{dla} \ |\Omega| > \Omega_M \quad \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$$

Wówczas sygnał $x_c(t)$ jest jednoznacznie określony przez ciąg swoich próbek

$$x[n] = x_c(nT), \quad n = 0, \pm 1, \cdots$$

jeżeli

$$\Omega_p = \frac{2\pi}{T} = 2\pi F_p > 2\Omega_M$$

lub inaczej (częstotliwości w Hz): $F_p > 2F_M$,

czyli jeżeli częstotliwość próbkowania jest co najmniej dwukrotnie większa od maksymalnej częstotliwości w widmie sygnału $x_c(t)$. Wówczas mówimy o próbkowaniu prawidłowym.

Minimalna częstotliwość próbkowania, przy której można jeszcze odtworzyć sygnał $x_c(t)$ bez zniekształceń, tzn. częstotliwość $F_p = 2F_M$, nazywa się szybkością Nyquista. Odpowiadający jej maksymalny okres próbkowania

$$T = 1/F_p$$

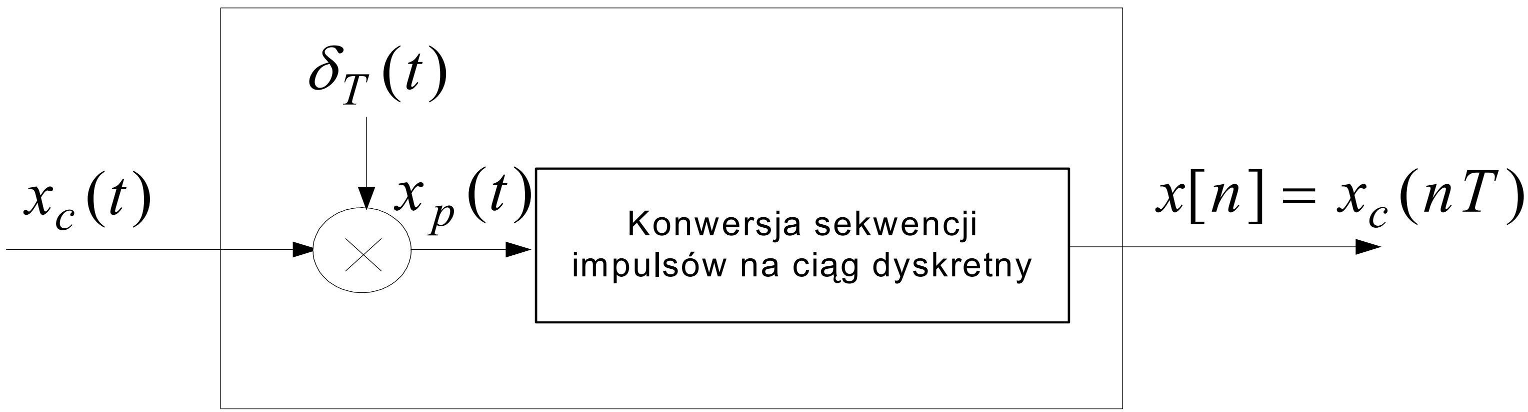
nazywa się przedziałem Nyquista. Częstotliwość Nyquista to maksymalna częstotliwość – F_M – w widmie sygnału $x_c(t)$. Terminologia USA

F_M – Nyquist frequency

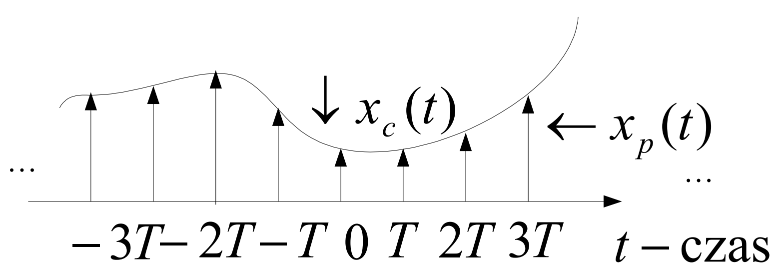
$2F_M$ – Nyquist rate

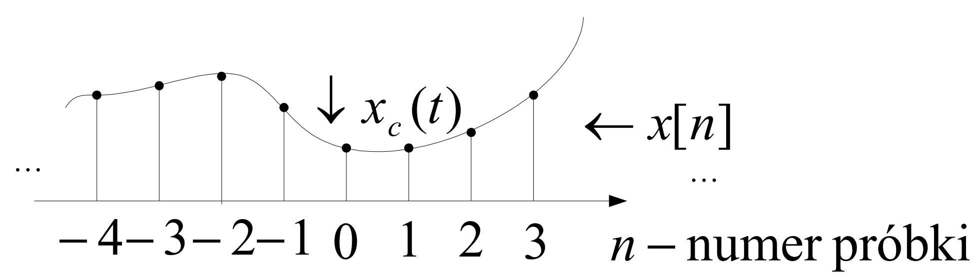
$\frac{1}{2F_M}$ – Nyquist interval

Próbkowanie - przetwornik C/D



Próbkowanie - przetwornik C/D





Reprezentacja operacji próbkowania jako procesu dwustopniowego

Reprezentacja operacji próbkowania jako procesu dwustopniowego (dla potrzeb czytelnego opisu analitycznego)

- mnożenie przez ciąg (sekwencję) impulsów Diraca,
- zamiana sekwencji impulsów na ciąg dyskretny.

Dziedzina czasu

$$x_p(t) = x_c(t)\delta_T(t) = x_c(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

a z właściwości próbkującej delty Diraca ($x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$)

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t-nT)$$

Dziedzina częstotliwości

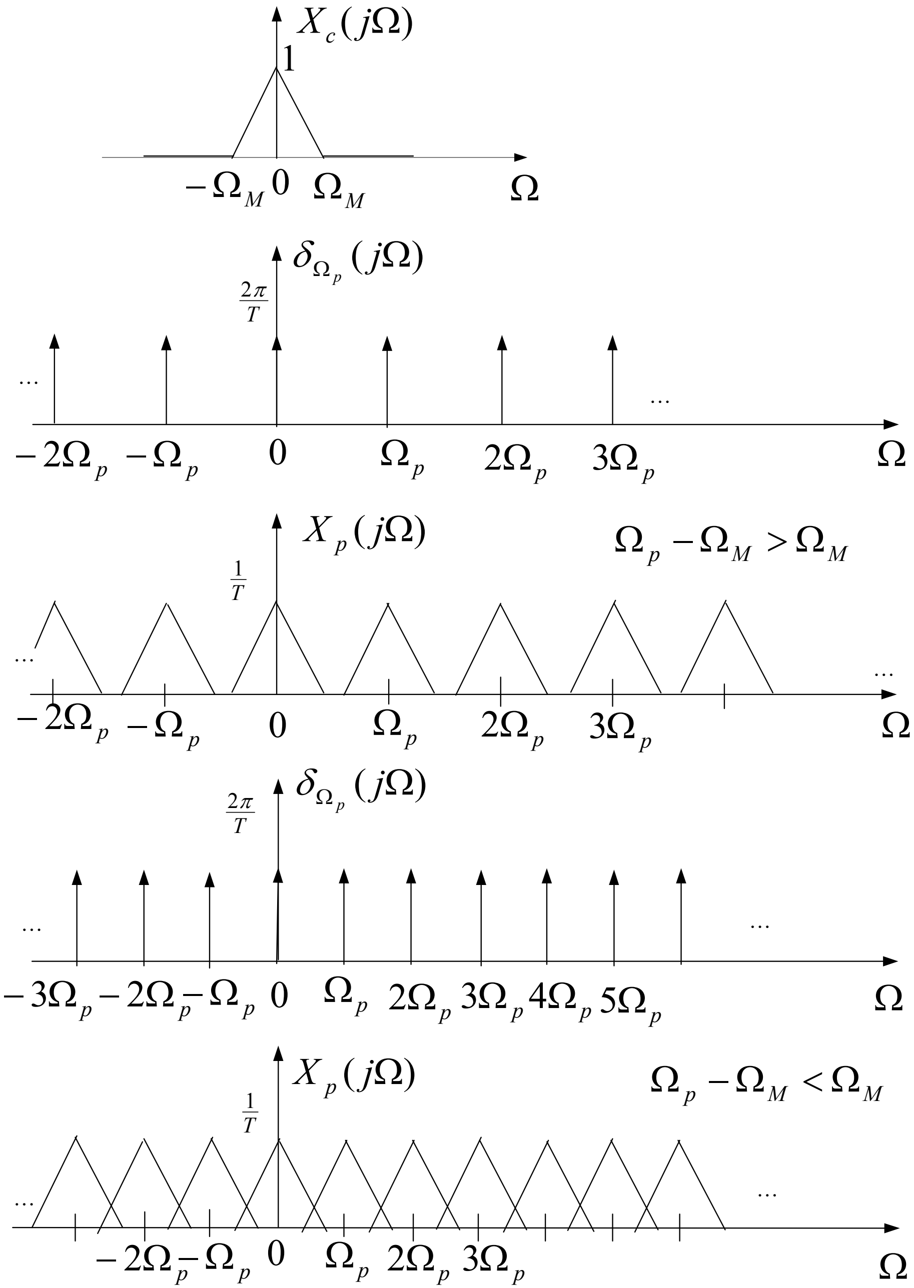
$$X_c(j\Omega) = \mathrm{F}[x_c(t)] \stackrel{\Delta}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t)e^{-j\Omega t}dt$$

$$\mathrm{F}[\delta_T(t)] = \delta_{\Omega_p}(j\Omega) = \Omega_p \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega - k\Omega_p)$$ wówczas

$$X_p(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(j\Omega) * \delta_{\Omega_p}(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c[j(\Omega - k\Omega_p)]$$

Wniosek: widmo $X_p(j\Omega)$ sygnału $x_p(t)$ jest superpozycją okresowo powtarzających się widm sygnału ciągłego $x_c(t)$. Kolejne składniki $X_p(j\Omega)$ są poprzesuwane o całkowitą wielokrotność pulsacji próbkowania Ω_p .

Przyjmijmy, że $X_c(j\Omega) = 0 \text{ dla } |\Omega| > \Omega_M$ tak, jak w twierdzeniu Nyquista, tzn. największą składową w widmie $X_c(j\Omega)$ jest składowa o pulsacji Ω_M.



Zastosujemy 2 różne pulsacje próbkowania: A i B

$$\Omega_p > 2\Omega_M$$

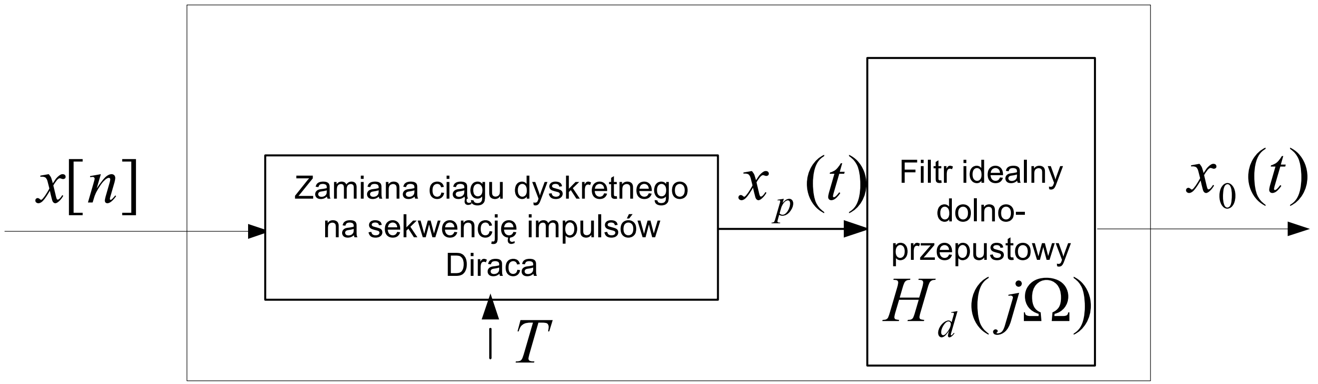
A. Rozłączne widma składowe

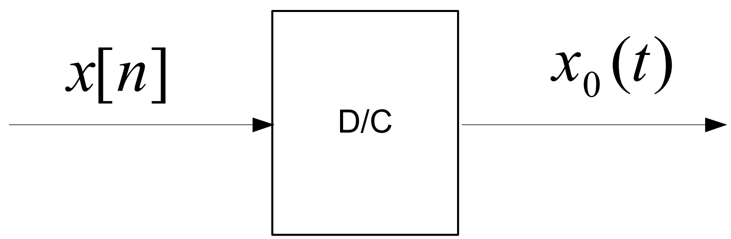
$$\Omega_p < 2\Omega_M$$

B. Widma składowe nie są rozłączne, ale nakładają się

Rekonstrukcja $x_c(t)$ na podstawie $x[n]$; system idealny odtwarzający sygnał ciągły

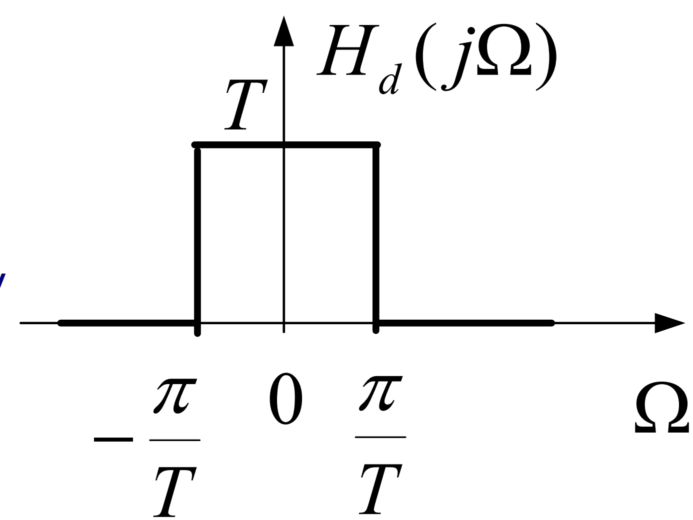
Odtwarzanie - przetwornik D/C





$$x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T}$$

wzór interpolacyjny Shannona



W systemie idealnym $x_0(t) = x_c(t)$.

Wyprowadzenie wzoru interpolacyjnego Shannona

$$h_d(t) = \mathcal{F}^{-1}[H_d(j\Omega)] = \frac{\sin(\pi t T)}{\pi t T} = \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$

gdzie

$$\operatorname{sinc}(x) \triangleq \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Wówczas

$$x_0(t) = x[n] * h_d(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h_d(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin[\pi(t - nT)/T]}{\pi(t - nT)/T}$$

i cały przebieg $x_0(t) = x_c(t)$ jest rekonstruowany na bazie funkcji sinc( ).

Twierdzenie o próbkowaniu sygnałów pasmowych

Jeżeli sygnał analogowy $x_c(t), \quad t \in (-\infty, \infty)$ zajmuje pasmo B w Hz, to można go bezbłędnie odtworzyć na podstawie ciągu jego równoodległych próbek

$$x[n] = x_c(nT) \qquad -\infty < n < \infty$$

pod warunkiem, że szybkość próbkowania $F_p = 1/T$ jest co najmniej dwukrotnie większa od szerokości pasma B czyli, gdy $F_p > 2B$ a inaczej $T < 1/(2B)$, gdzie T to odstęp (okres próbkowania równomiernego) w sekundach, jak poprzednio.