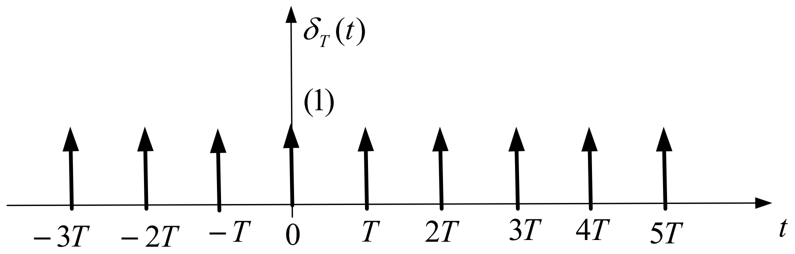
Dystrybucja grzebieniowa

Znaleźć transformatę Fouriera ciągu równoodległych impulsów o jednostkowym natężeniu i powtarzających się co T sekund. Jest to funkcja bardzo istotna w teorii próbkowania i dlatego dogodnie jest oznaczyć ją przez $\delta_T(t)$.



$$\delta_T(t) = \delta(t) + \delta(t-T) + \delta(t-2T) + \cdots + \delta(t-nT) + \cdots$$
$$+ \delta(t+T) + +\delta(t+2T)\cdots + \delta(t+nT) + \cdots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$

Jest to oczywiście funkcja okresowa o okresie T. Rozwiniemy najpierw tę funkcję w szereg Fouriera

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega_0 t}$$

przy czym

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Funkcja $\delta_T(t)$ w przedziale $(-T/2, +T/2)$ jest po prostu funkcją $\delta(t)$. Zatem

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Z właściwości próbkowania funkcji impulsowej wyrażonej w równości

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = x(0)$$

równanie powyższe redukuje się do

$$X_n = \frac{1}{T}$$

A zatem X_n redukuje się do $\frac{1}{T}$. Wynika stąd, że ciąg impulsów o okresie T zawiera składowe o pulsacjach $\omega = 0, \pm\omega_0, \pm 2\omega_0, \cdots \pm n\omega_0 \cdots,$ gdzie $\omega_0 = 2\pi / T$ i

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}$$

Do znalezienia transformaty Fouriera funkcji $\delta_T(t)$ wykorzystamy równanie

$$F\{x(t)\} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

definiujące transformatę Fouriera funkcji okresowej. Otrzymujemy

$$F\{\delta_T(t)\} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T}\delta(\omega - n\omega_0) = \frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - n\omega_0) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - n\omega_0) = \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega)$$

Wynika stąd, że transformata Fouriera dystrybucji grzebieniowej jest również dystrybucją grzebieniową.