Dwustronne przekształcenie (transformacja) Z

Przekształcenie proste – szereg Laurent'a

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Przekształcenie odwrotne

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(z) z^{n-1} \mathrm{d}z$$

$\boxed{\Gamma}$ **– kontur w obszarze zbieżności (ROC) obejmujący początek układu współrzędnych.**

Notacja $x[n] \Leftrightarrow X(z)$

Wzór na przekształcenie odwrotne wyprowadza się za pomocą wzoru całkowego Cauchy'ego

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} z^{k-1}\mathrm{d}z = \delta[k] = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

gdzie prawa strona to impuls jednostkowy zwany deltą Kroneckera.

Dwustronne przekształcenie Z sprowadza się do jednostronnego przekształcenia Z:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

jeżeli $x[n] = 0$ **dla** $n < 0$ **.**

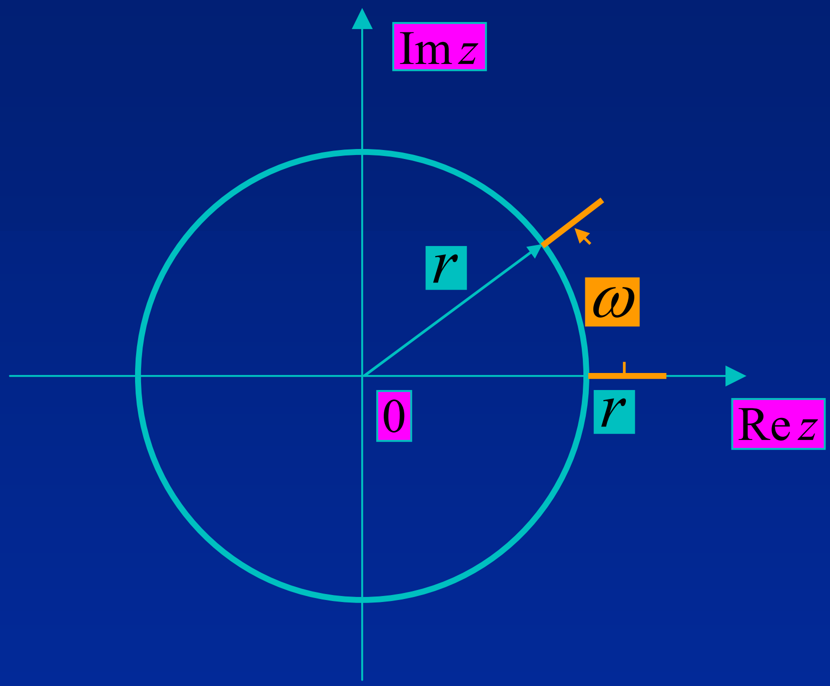
Transformata Z nie dla każdego ciągu $x[n]$ **jest zbieżna, tzn. suma nieskończonego szeregu Laurent'a nie zawsze jest skończona dla wszystkich wartości zmiennej z.**

Zbiór wartości z, dla których Z-transformata jest zbieżna nazywamy obszarem zbieżności (ROC – region of convergence). Warunkiem zbieżności jest bezwzględna sumowalność ciągu $x[n] z^{-n}$ **co zapisujemy**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x[n] r^{-n} \right| < \infty$$

gdzie $z = re^{j\omega}$ **.**

Zmienna zespolona *z* w postaci biegunowej $z = re^{j\omega}$ ma następującą interpretację na płaszczyźnie zespolonej. Jest to wektor o długości r i kącie ω .



Przykład.

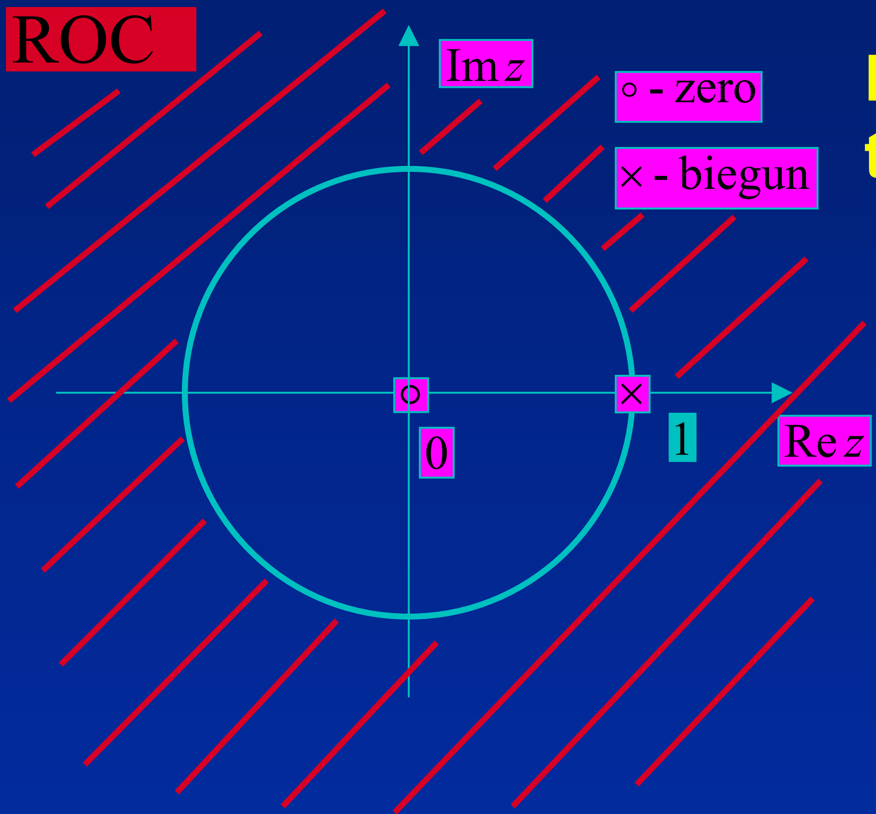
Ciąg (skok jednostkowy) $x[n] = u[n] \triangleq \begin{cases} 1, & n = 0, 1, \dots \\ 0, & n < 0 \end{cases}$

nie jest bezwzględnie sumowalny, ale ciąg $r^{-n} u[n]$ **jest bezwzględnie sumowalny gdy** $r > 1$ **. Oznacza to, że istnieje transformata Z skoku jednostkowego i wynosi**

$$U(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \underset{|z|>1}{=} \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

pod warunkiem, że $r > 1$**, a obszarem zbieżności jest** $|z| > 1$ **, tj. zewnętrze okręgu jednostkowego.**

$$U(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n] z^{-n} = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1$$



Rozkład zer i biegunów Z-transformaty $U(z)$ ciągu $u[n]$

Do najbardziej użytecznych i ważnych transformat Z należą te, dla których $X(z)$ jest funkcją wymierną w obszarze zbieżności:

$$X(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}=\frac{b_0}{a_0}\frac{\prod_{k=1}^{M}(1-c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_k z^{-1})}$$

gdzie $P(z)$ i $Q(z)$ to wielomiany zmiennej z. Wartości z, dla których $X(z)=0$ nazywamy zerami, a wartości z, dla których $X(z)=\infty$ nazywamy biegunami. Zera to miejsca zerowe $P(z)$, a bieguny to miejsca zerowe $Q(z)$. Oprócz tego mogą wystąpić bieguny dla $z=0$ i $z=\infty$. Dla wymiernych transformat Z istnieją ważne związki pomiędzy położeniem biegunów $X(z)$, a ROC transformaty Z.

Podsumowując: Transformata $X(z)$ łącznie z obszarem zbieżności (ROC) stanowi unikatową reprezentację ciągu $x[n]$.

Wyróżniamy 6 obszarów zbieżności dla wymiernej $X(z)$.

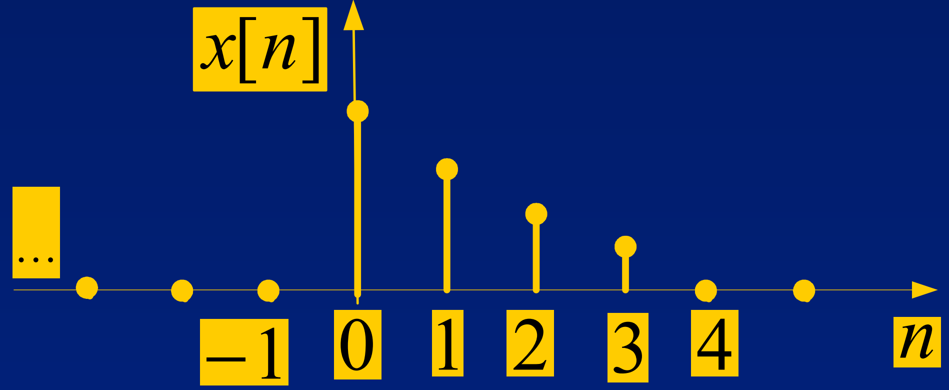
A. Sygnały o skończonym czasie trwania.

1. Prawostronny (przyczynowy). ROC to cała płaszczyzna ***z*** za wyjątkiem $z = 0$.
2. Lewostronny (antyprzyczynowy). ROC to cała płaszczyzna ***z*** za wyjątkiem $z = \infty$.
3. Dwustronny (nieprzyczynowy). ROC to cała płaszczyzna ***z*** za wyjątkiem $z = 0$ i $z = \infty$.

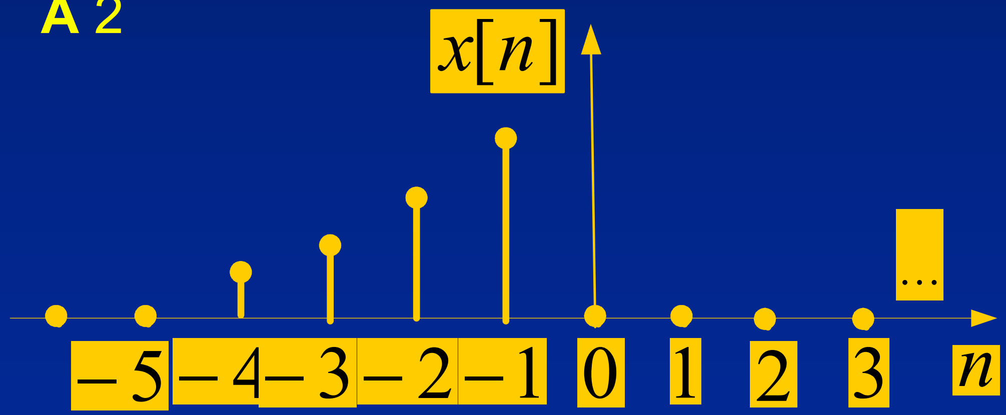
B. Sygnały o nieskończonym czasie trwania.

1. Prawostronny (przyczynowy). ROC to obszar $|z| > R^+$, czyli zewnętrze okręgu o promieniu R^+ .
2. Lewostronny (antyprzyczynowy). ROC to obszar $|z| < R^-$, czyli wnętrze okręgu o promieniu R^- .
3. Dwustronny (nieprzyczynowy). ROC to obszar $R^+ < |z| < R^-$, czyli pierścień o promieniu wewnętrznym R^+ i zewnętrznym R^-

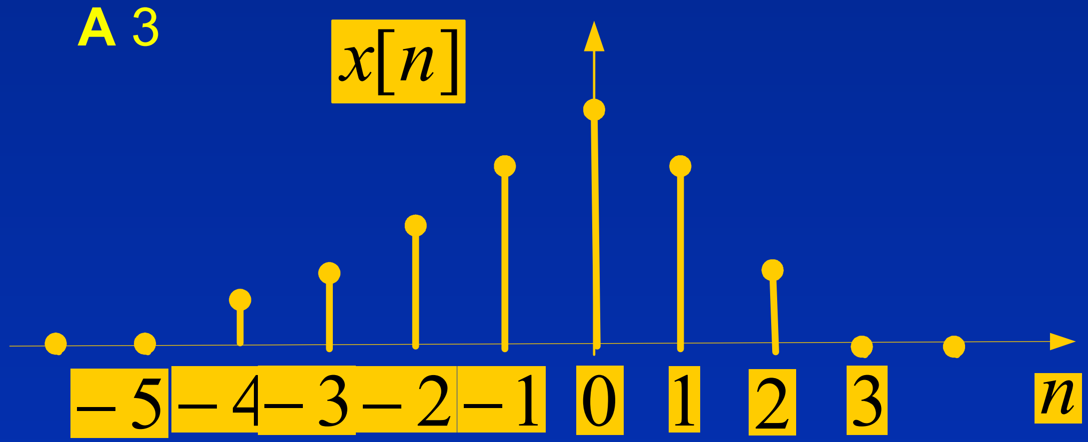
A 1



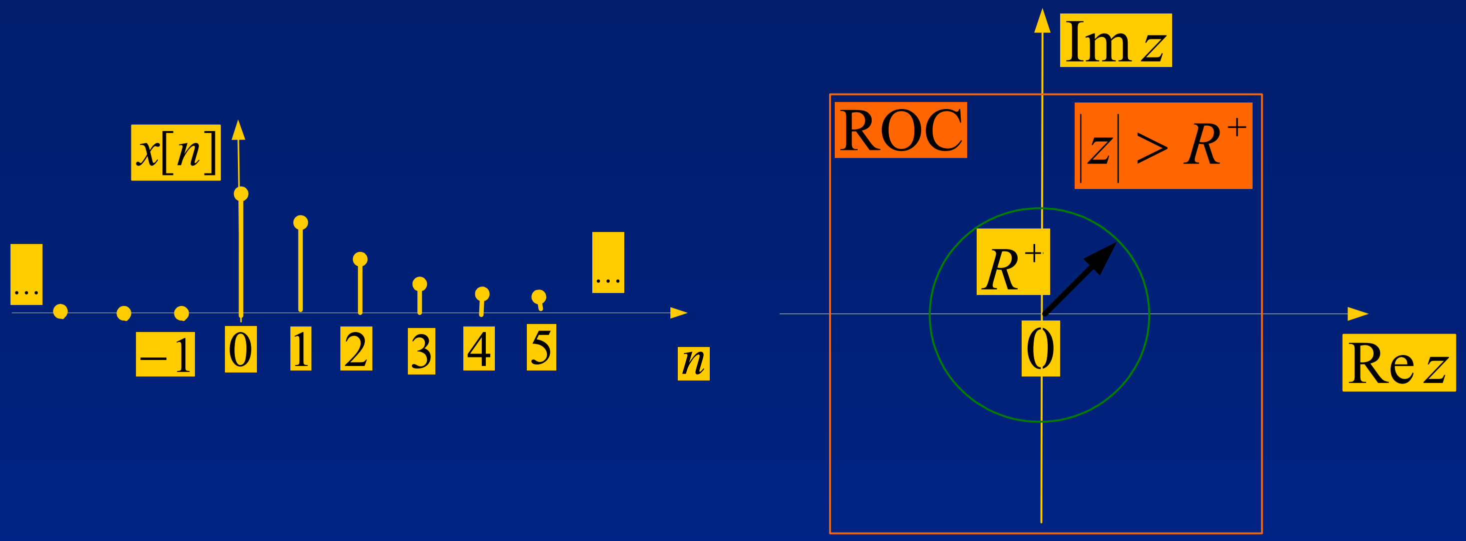
A 2



A 3

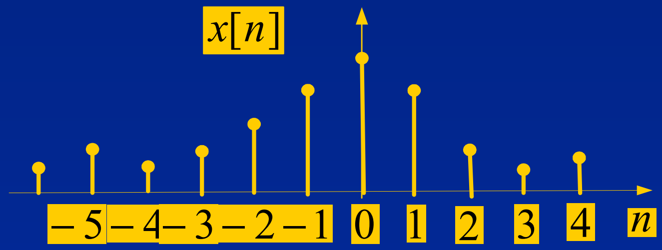


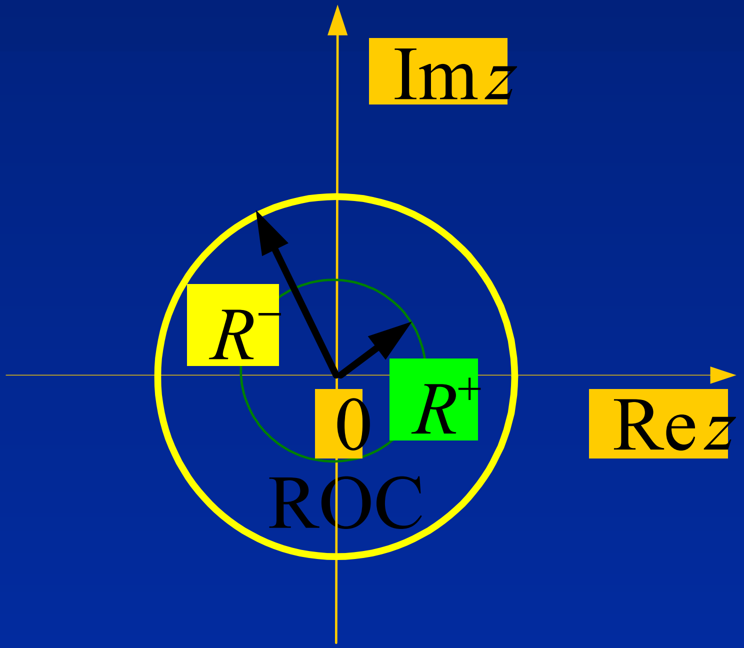
B 1



B 2

B 3





Generalnie:

1. ROC nie zawiera biegunów.
2. ROC ciągu prawostronnego (przyczynowego) rozciąga się na zewnątrz najbardziej zewnętrznego bieguna $X(z)$ do nieskończoności.
3. ROC ciągu lewostronnego (antyprzyczynowego) rozciąga się do wewnątrz od najbardziej wewnętrznego bieguna $X(z)$ do zera.
4. ROC ciągu dwustronnego jest pierścieniem ograniczonym wewnętrznie i zewnętrznie przez bieguny. Ten pierścień nie zawiera biegunów.

Przykłady.

1. $x[n] = a^n u[n]$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(az^{-1}\right)^n \underset{|z|>|a|}{=} \frac{1}{1-az^{-1}}$$

ponieważ sumą nieskończonego szeregu geometrycznego

$a_0, a_{1,} \cdots a_n, \cdots$, gdzie $|q| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ jest $S_n = \frac{a_0}{1-q}$.

A więc

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a|$$

2. $x[n] = -a^n u[-n-1] = \begin{cases} 0, & n \geq 0 \\ -a^n, & n \leq -1 \end{cases}$

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[-n-1] z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(az^{-1}\right)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(az^{-1}\right)^{-n} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(az^{-1}\right)^{-n} \underset{|z|<|a|}{=} \frac{1}{1-az^{-1}}$$

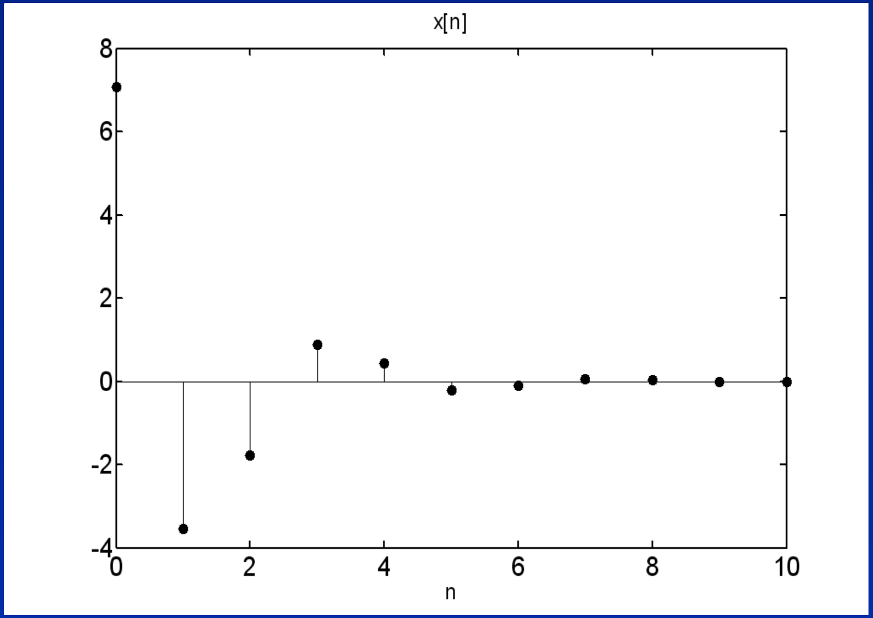
A więc $X(z) = 1 - \frac{1}{1-a^{-1}z} = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \quad |z| < |a|$. Stąd

KONKLUZJA. Dwa różne ciągi, ta sama transformata, lecz różne obszary zbieżności.

Przykład.

$$x[n] = 10\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \cos\left(n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)u[n]$$

$$u[n] \triangleq \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$



Oblicz transformatę Z sygnału $x[n]$.

Rozwiązanie. Ze wzoru Eulera na cos()

$$x[n] = 5\left(\frac{1}{2}\right)^{n} (e^{j\frac{\pi}{2}n} e^{j\frac{\pi}{4}} + e^{-j\frac{\pi}{2}n} e^{-j\frac{\pi}{4}})u[n]$$

Ponieważ (patrz tablice)

$$\alpha^{n} u[n] \Leftrightarrow \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}, \; |z| > |\alpha|$$

oraz

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \Leftrightarrow X(e^{-j\omega_0} z)$$

to tu, dla $\alpha = \frac{1}{2}$ **i** $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ **oraz** $e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$

otrzymujemy po prostych przekształceniach

$$X(z) = \frac{5}{\sqrt{2}}\left(\frac{z(1+j)}{z - j\frac{1}{2}} + \frac{z(1-j)}{z + j\frac{1}{2}}\right) = \frac{5}{\sqrt{2}}\frac{z(2z-1)}{z^2 + \frac{1}{4}}, \; |z| > \frac{1}{2}$$

A teraz przećwiczmy obliczanie transformaty odwrotnej.

Przykład 2. Oblicz oryginał $x[n]$**, gdy dana jest transformata**

$$X(z) = \frac{5}{\sqrt{2}}\frac{z(2z-1)}{z^2 + \frac{1}{4}}, \; |z| > \frac{1}{2}$$

Rozkładamy na ułamki proste funkcję

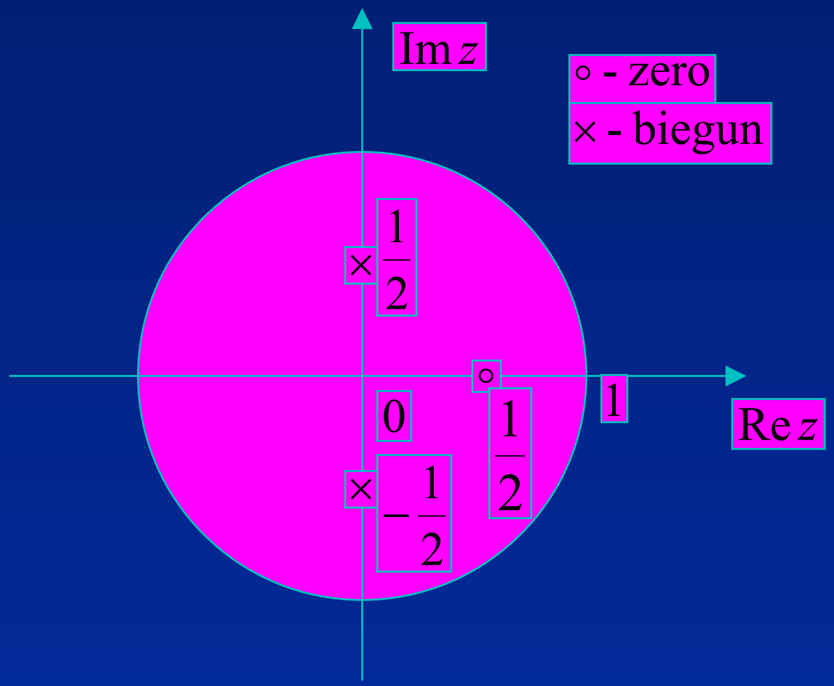
$$\frac{X(z)}{z} = \frac{5}{\sqrt{2}} \frac{(2z-1)}{z^2 + \frac{1}{4}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

W tym celu obliczamy wyróżnik mianownika i pozycje biegunów

$$\Delta = -1, \ \sqrt{\Delta} = j, \quad p_1 = j\frac{1}{2}, \quad p_2 = p_1^* = -j\frac{1}{2}$$

A zatem

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A}{z - j\frac{1}{2}} + \frac{A^*}{z + j\frac{1}{2}}$$



Im z
○ - zero
× - biegun
1/2
0
1/2
1
−1/2
Re z

Tu

$$A = \frac{X(z)}{z}\left(z - j\frac{1}{2}\right)\Bigg|_{Z = j\frac{1}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}(1 + j) = 5e^{j\frac{\pi}{4}}$$

i

$$A^* = \frac{X(z)}{z}\left(z + j\frac{1}{2}\right)\Bigg|_{Z = -j\frac{1}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}(1 - j) = 5e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

Stąd

$$X(z) = 5\left(\frac{ze^{j\frac{\pi}{4}}}{z - j\frac{1}{2}} + \frac{ze^{-j\frac{\pi}{4}}}{z + j\frac{1}{2}}\right)$$

Poszukiwany oryginał

$$x[n]=5\left(e^{j\frac{\pi}{4}}\left(j\frac{1}{2}\right)^{n}+e^{-j\frac{\pi}{4}}\left(-j\frac{1}{2}\right)^{n}\right)u[n]$$

Ponieważ

$$\pm j = e^{\pm j\frac{\pi}{2}}$$

to również

$$x[n]=10\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\frac{e^{j\left(n\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}+e^{-j\left(n\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}{2}u[n]$$

I ostatecznie, z wzoru Eulera na sinus pokazujemy, że faktycznie

$$x[n]=10\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cos\left(n\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)u[n]$$

Przykład.

Oblicz Z-transformatę sygnału

$$x[n] = \left[3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] u[n]$$

Rozwiązanie.
Ponieważ

$$\alpha^n u[n] \Leftrightarrow \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}, \quad |z| > |\alpha|$$

to

$$X(z) = 3\frac{1}{1 - z^{-1}} - 3\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, \qquad |z| > 1$$

lub równoważnie

$$X(z) = \frac{z^3}{(z-1)\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{3}\right)}, \qquad |z| > 1$$

Przykład.

Oblicz Z-transformatę sygnału

$$x[n] = \frac{1}{2}\{\delta[n] - \delta[n-2]\}$$

$$\delta[n] \stackrel{\Delta}{=} \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie.

Ponieważ

$$\delta[n] \Leftrightarrow 1$$

i

$$x[n-n_0] \Leftrightarrow z^{-n_0} X(z), \quad n_0 = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

to

$$X(z) = \frac{1}{2}\left\{1 - z^{-2}\right\}, \quad |z| > 0$$

Suma skończonego postępu geometrycznego.

Postępem geometrycznym nazywamy taki ciąg liczb $a_1, a_2, \cdots, a_n$ **(zwanych wyrazami postępu), w którym każdą następną liczbę otrzymuje się z poprzedniej przez pomnożenie jej przez określoną liczbę** q **(zwaną ilorazem postępu), zakłada się przy tym, że** $a_1 \neq 0 \quad i \quad q \neq 0$**. Jeżeli** $q > 1$ **postęp nazywamy rosnącym, jeżeli** $q < 1$ **– nazywamy go malejącym.**

Wzory na wyraz ogólny oraz na sumę n **wyrazów postępu geometrycznego są odpowiednio**

$$a_n = a_1 q^{n-1}, \quad S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}, \quad \text{gdy} \;\; q \neq 1$$

Natomiast $S_n = n a_1, \quad \text{gdy} \;\; q = 1$ **.**

Dla sumy malejącego postępu geometrycznego dogodniej jest posługiwać się wzorem

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

Jeżeli liczba wyrazów malejącego postępu geometrycznego wzrasta nieograniczenie, to , a n dąży do granicy:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S = \frac{a_1}{1-q}$$

(suma nieskończenie malejącego postępu geometrycznego).

Transmitancja systemu DLS

(dyskretnego, liniowego, stacjonarnego)

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] \quad \Leftrightarrow \quad X(z) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y(z)$$

$x[n]$ **– pobudzenie (sygnał wejściowy)**

$y[n]$ **– odpowiedź (sygnał wyjściowy)**

Założenie: zerowe warunki początkowe (zwp) – pamięci wyzerowane .

Transmitancja

$$\boxed{H(z) \overset{\Delta}{=} \left. \frac{Y(z)}{X(z)} \right|_{\text{zwp}}}$$

Odpowiedź impulsowa

$$\boxed{h[n] = Z^{-1}\{H(z)\}}$$

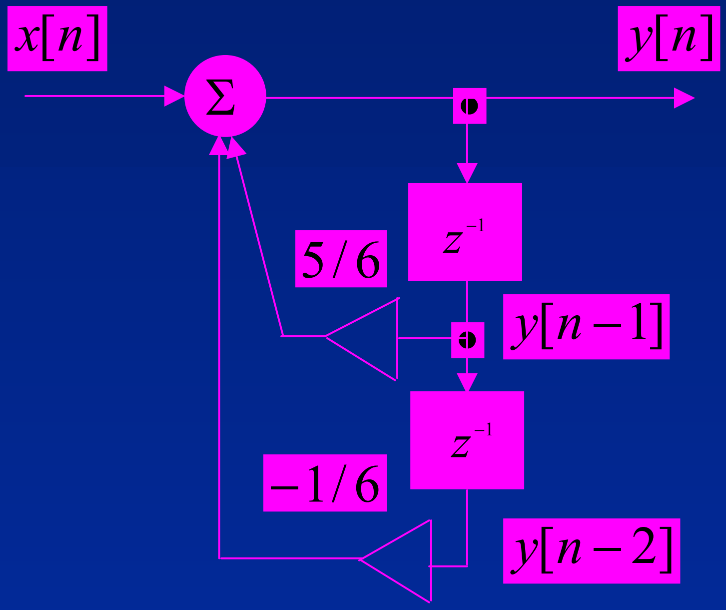
Odpowiedź impulsowa, z definicji, to odpowiedź systemu DLS na pobudzenie deltą Kroneckera – impulsem jednostkowym $\delta[n]$ przy zwp.

$$x[n]=\delta[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]=h[n]$$

Algorytm systemu DLS to równanie różnicowe wiążące pobudzenie $x[n]$ z odpowiedzią $y[n]$. Równoważnie opisuje się system DLS za pomocą schematu blokowego. Schemat blokowy systemu DLS zawiera co najwyżej trzy rodzaje elementów: sumatory, elementy mnożące i elementy pamięciowe, które opóźniają przetwarzany sygnał o całkowitą wielokrotność odstępu jego sąsiednich próbek.

Przykład.

Napisz algorytm i oblicz transmitancję i odpowiedź impulsową systemu DLS



Rozwiązanie.

$$y[n] = x[n] + \frac{5}{6}y[n-1] - \frac{1}{6}y[n-2]$$

$$Y(z) = X(z) + \frac{5}{6} z^{-1} Y(z) - \frac{1}{6} z^{-2} Y(z)$$

$$H(z) \overset{\Delta}{=} \left. \frac{Y(z)}{X(z)} \right|_{\text{zwp}} = \frac{1}{1 - \frac{5}{6} z^{-1} + \frac{1}{6} z^{-2}} = 3 \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} - 2 \frac{1}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}}$$

$$h[n] = Z^{-1}\{H(z)\} = \left[3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \right] u[n]$$

Przyczynowość i stabilność systemu DLS

System DLS jest przyczynowy (realizowalny w czasie rzeczywistym) jeżeli jego odpowiedź impulsowa $h[n]=0$ dla $n<0$.

System DLS jest przyczynowy i stabilny jeżeli jego odpowiedź impulsowa $h[n]$ jest bezwzględnie sumowalna, tzn.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| h[n] \right| < \infty$$

System DLS jest przyczynowy i stabilny jeżeli bieguny jego transmitancji $H(z)$ leżą wewnątrz okręgu jednostkowego, tzn. gdy dla

$$H(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}}$$

$$H(z) = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{k=1}^{M} (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N} (1 - d_k z^{-1})}$$

mamy $\left| \quad \right|$.

Minimalnofazowość systemu DLS

System DLS jest minimalnofazowy jeżeli jest przyczynowy i stabilny i *ponadto* jeżeli zera jego transmitancji $H(z)$ leżą wewnątrz okręgu jednostkowego, tzn. gdy $|c_k| < 1, \quad k = 1, 2, \cdots, M$. Zatem warunek minimalnofazowości wymaga, by

$$|c_k| < 1, \quad k = 1, 2, \cdots, M \quad \text{i} \quad |d_k| < 1, \quad k = 1, 2, \cdots, N$$

Dla systemu mninimalnofazowego $H(z)$ istnieje realizowalny system odwrotny o transmitancji $1/H(z)$.

Sprawdź, że system DLS z poprzedniego przykładu jest minimalnofazowy,

Mieliśmy

$$H(z) \overset{\Delta}{=} \left. \frac{Y(z)}{X(z)} \right|_{\text{zwp}} = \frac{1}{1 - \frac{5}{6} z^{-1} + \frac{5}{6} z^{-2}} = 3 \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} - 2 \frac{1}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}}$$

Stąd $\frac{1}{1 - \frac{}{2} z} \frac{1}{1 - \frac{}{3} z}$ ***i*** $|c_1| = 0 < 1, \quad \text{i} \quad |d_1| = 1/2 < 1, \quad |d_2| = 1/3 < 1$

a więc system jest minimalnofazowy.

Przykład. System o transmitancji

$$H(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}, \quad |z| > |\alpha|, \quad |\alpha| < 1$$

jest minimalnofazowy. System odwrotny

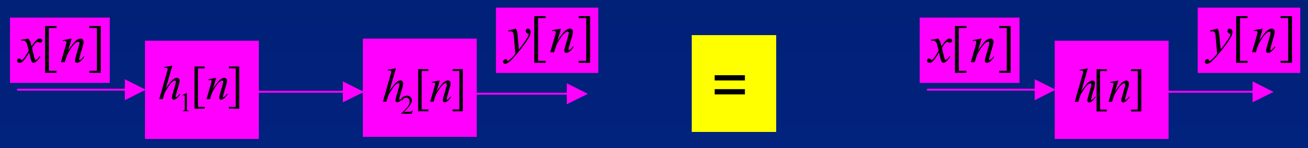
$$\frac{1}{H(z)} = 1-\alpha z^{-1}, \quad z \neq 0$$

jest przyczynowy, a zatem realizowalny w czasie rzeczywistym, i stabilny.

Przykładowe zastosowania systemów przyczynowych i stabilnych, odwrotnych do systemów minimalnofazowych: predykcja liniowa i rozplot, np. w systemach telekomunikacyjnych.

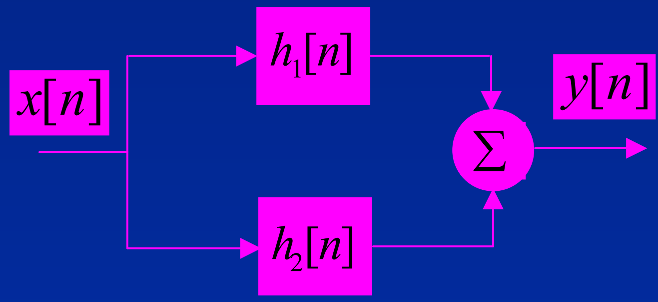
Łączenie systemów DLS

Połączenie kaskadowe – szeregowe



$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] \Leftrightarrow H(z) = H_1(z) H_2(z)$$

Połączenie równoległe



$$h[n] = h_1[n] + h_2[n] \Leftrightarrow H(z) = H_1(z) + H_2(z)$$

Łatwo uogólnić powyższe na większą liczbę systemów.