# Rozkład wymiernej transformaty Z na ułamki proste

$$X(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}=\frac{b_0+b_1 z^{-1}+\cdots+b_M z^{-M}}{a_0+a_1 z^{-1}+\cdots+a_N z^{-N}}$$

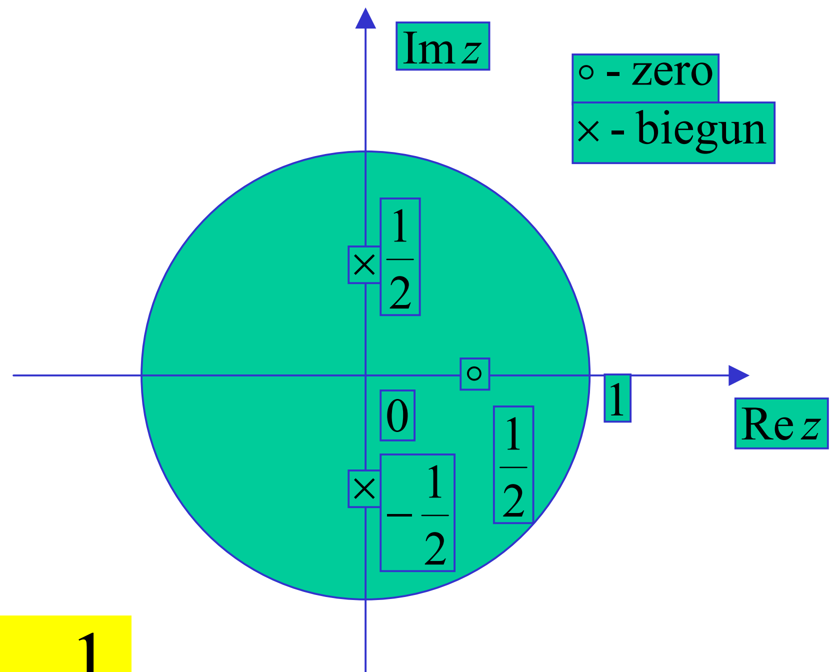
$$X(z)=\frac{b_0}{a_0}\frac{\prod_{k=1}^{M}(1-c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_k z^{-1})}$$

$c_k,\quad k=1,2,\cdots,M \quad$ zera $X(z)$

$d_k,\quad k=1,2,\cdots,N \quad$ bieguny $X(z)$

przykładowo

$$X(z)=\frac{5}{\sqrt{2}}\frac{(2z-1)}{z^2+\frac{1}{4}},\quad |z|>\frac{1}{2}$$



**A.** Bieguny pojedyncze, $M<N$

$$X(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-d_k z^{-1}},\quad |z|>R$$

$$A_k=\left(1-d_k z^{-1}\right)X(z)\Big|_{z=d_k}$$

Albo $\quad A_k=(z-d_k)\dfrac{X(z)}{z}\Big|_{z=d_k}\quad$ i wtedy rozkład $\dfrac{X(z)}{z}$ .

Gdy $M\geq N$ to

$$X(z)=\sum_{i=0}^{M-N}B_i z^{-i}+\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-d_k z^{-1}},\quad |z|>R$$

**Przykład**. Oblicz $x[n]$, gdy dane jest

$$X(z)=\frac{6}{z-2},\quad |z|>2$$

Rozwiązanie.

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{6}{z(z-2)}=\frac{A_1}{z}+\frac{A_2}{z-2}$$

$$A_1=-3,\quad A_2=3$$

$$X(z)=-3\left(1-\frac{z}{z-2}\right)$$

$$x[n]=-3\left(\delta[n]-2^n u[n]\right)=\begin{cases}-3\delta[n]+3\cdot 2^n, & n\geq 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$

**B.** Biegun wielokrotny rzędu $s$ w $z=d_i$, pozostałe pojedyncze, $M \geq N$

$$X(z)=\sum_{i=0}^{M-N} B_i z^{-i}+\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N}\frac{A_k}{1-d_k z^{-1}}+\sum_{m=1}^{s}\frac{C_m z^{(1-m)}}{\left(1-d_i z^{-1}\right)^m}, \quad |z|>R$$

$$C_m=\frac{1}{(s-m)!}\left\{\frac{\mathrm{d}^{s-m}}{\mathrm{d}z^{s-m}}\left[\left(z-d_i\right)^s\frac{X(z)}{z}\right]\right\}\Bigg|_{z=d_i}$$ z rozkładem $\frac{X(z)}{z}$ .

Albo

$$C_m = \frac{1}{(s-m)!}\left\{\frac{\mathrm{d}^{s\text{-}m}}{\mathrm{d}z^{s-m}}\left[\left(1-d_i z^{-1}\right)^s X(z) z^{s-1}\right]\right\}\Bigg|_{z=d_i}$$

i wtedy rozkład $X(z)z^{s-1}$ .

**Przykład**. Oblicz $x[n]$, gdy dane jest

$$X(z) = \frac{2z^2 - 2z}{(z-3)(z-5)^2}, \quad |z| > 5$$

Rozwiązanie.

Tu $d_1 = 3$ - biegun pojedynczy i $d_2 = 5$ - biegun podwójny,

$M = 2, \quad N = 3, \quad M < N$

$$X(z) = \frac{A_1}{1 - d_1 z^{-1}} + \frac{C_1}{1 - d_2 z^{-1}} + \frac{C_2 z^{-1}}{\left(1 - d_2 z^{-1}\right)^2}$$

$$A_1 = (z - d_1)\frac{X(z)}{z}\bigg|_{z=d_1} = \frac{2z-2}{(z-5)^2}\bigg|_{z=3} = 1$$

$$m=2, s=2, \quad C_2 = \frac{1}{0!}\frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}z^0}\left[(z-d_2)^2 \frac{2z^2-2z}{z(z-3)(z-5)^2}\right]\Bigg|_{z=d_2=5} =$$

$$= \frac{2z-2}{z-3}\Bigg|_{z=5} = 4$$

$$m=1, s=2, \quad C_1 = \frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{2z-2}{z-3}\right]\Bigg|_{z=5} = -1$$

Zatem

$$X(z) = \frac{1}{1-3z^{-1}} + \frac{-1}{1-5z^{-1}} + \frac{4z^{-1}}{\left(1-5z^{-1}\right)^2}$$

$$x[n] = (3^n - 5^n + 4n5^{n-1})u[n]$$

gdyż z tablicy transformat Z

$$a^n u[n] \Leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$na^n u[n] \Leftrightarrow \frac{1}{(1-az^{-1})^2}$$

Można też zapisać $x[n]$ przedziałami

$$x[n] = \begin{cases} 3^n + 5^n\left(\frac{4}{5}n - 1\right), & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$