

Sygnały, ich klasyfikacja, parametry, widma

Andrzej Leśnicki, PG Katedra Systemów Multimedialnych, Gdańsk 2011

1. Pojęcie sygnału

We współczesnych społeczeństwach w obiegu znajduje się ogromna ilość wiadomości, informacji. Nośnikami tych wiadomości (informacji) są sygnały. W języku technicznym słowo „sygnał” oznacza to samo co rozumiemy pod tym pojęciem w języku potocznym. Sygnały są nadawane i odbierane, służą do komunikowania się.

Sygnałem nazywamy wielkość fizyczną zmieniającą się w takt treści wiadomości i niosącą energię w postaci przydatnej do przesyłania na odległość, przetwarzania, zapisu.

Sygnały powstają na styku bodziec-czujnik. W zależności od wielkości fizycznej i rodzaju energii istnieją różne rodzaje sygnałów. Są to na przykład:

- sygnały mechaniczne z energią sił, naprężeń i drgań mechanicznych;
- sygnały chemiczne z energią reakcji chemicznych;
- sygnały dźwiękowe z energią drgań akustycznych;
- sygnały optyczne z energią fal świetlnych;
- sygnały elektryczne z energią elektryczną.

Przy obecnym poziomie rozwoju technologii najbardziej popularne są sygnały elektryczne, gdyż są one najłatwiejsze i najtańsze do wytwarzania, przetwarzania i przesyłania. Dlatego nawet w przypadku, gdy mamy do czynienia z innym rodzajem sygnału (np. sygnał w postaci drgań mechanicznych), to staramy się od razu zastosować przetwornik zamieniający ten sygnał na sygnał elektryczny. Obecnie oprócz sygnałów elektrycznych bardzo często są też stosowane sygnały optyczne przesyłane w światłowodach.

Z matematycznego punktu widzenia sygnały są funkcjami $f(x)$. Z reguły są one funkcjami czasu i są oznaczane jako $s(t)$, ale np. w przypadku sygnału obrazu nieruchomego argumentami będą współrzędne na płaszczyźnie $s(x, y)$.

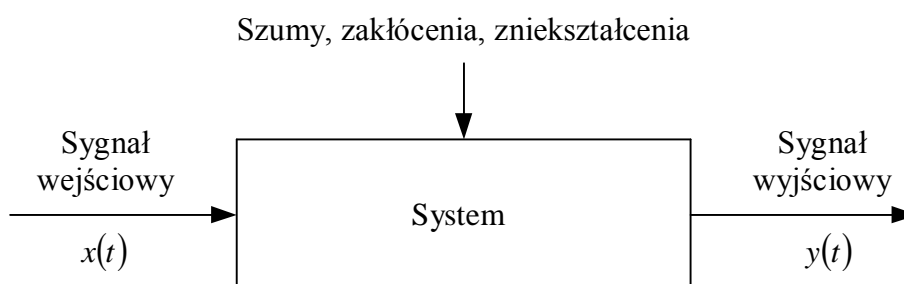
Człowiek odbiera sygnały za pomocą pięciu zmysłów przystosowanych do odbioru sygnałów o postaci analogowej: wzrok, słuch, dotyk, węch, smak. Zdecydowanie najwięcej wiadomości dociera do człowieka poprzez zmysł wzroku i na drugim miejscu poprzez zmysł słuchu (pozostałe zmysły mają mniejsze znaczenie). Dlatego w telekomunikacji największe znaczenie ma przesyłanie sygnałów dźwięku i obrazu. Zmysły człowieka nieustannie odbierają informację, jest jej ogromna ilość. Tak jak dla fizyka świat jest wypełniony materią i energią, tak dla informatyka świat jest wypełniony informacją.

Odebrany sygnał z wiadomością ma wzbogacić wiedzę odbiorcy. Odebrana wiadomość będzie wykorzystana do podjęcia określonej decyzji, staje się informacją, a dla informacji zasadnicze znaczenie ma jej wiarygodność. Używamy określenia „informacja” zamiast „wiadomość” dla podkreślenia jej przypadkowego charakteru. Najmniejszą jednostką informacji jest 1 bit (nazwa jednostki jest złożeniem z ang. **binary digit**). Odbierając 1 bit informacji (0 lub 1) musimy wiedzieć jakie jest prawdopodobieństwo przekłamania. W

praktyce najczęściej mamy do czynienia z systemami, w których strumień informacji ma przekłamaną przeciętnie 1 bit na 1 000 000 bitów, czyli stopa błędów (ang. bit error ratio) ma wartość $BER = 10^{-6}$.

Sygnały podlegają zakłóceniom i zniekształceniom. Ten sam sygnał raz jest sygnałem użytecznym, a innym razem zakłóceniem. Na przykład sygnał mowy dwóch rozmawiających osób jest dla nich sygnałem użytecznym, ale dla osoby postronnej czerpiącej akurat informację z innego źródła, np. poprzez czytanie książki, rozmowa ta jest zakłóceniem, szumem informacyjnym. Podobnie jest w systemach telekomunikacyjnych, gdzie kanały łączności ze strumieniami informacji zakłócają się wzajemnie. Dodatkowo wszechobecne są szумы termiczne. Z każdym przetworzeniem, przesłaniem, zapisaniem i odczytaniem sygnału są związane dodatkowe szумы, zakłócenia i zniekształcenia. Z tego powodu odbierane sygnały są sygnałami niezdeterminowanymi, możemy podać tylko z prawdopodobieństwem mniejszym od jedności w jakim przedziale mieści się wartość sygnału w danej chwili czasu. Nauką zajmującą się wydobywaniem informacji ze skażonych szumami i zakłóceniami sygnałów jest teoria informacji.

Zwyczajowo sygnał wejściowy (nadawany, przetwarzany) oznacza się jako $x(t)$, a sygnał wyjściowy (odbierany, przetworzony) oznacza się jako $y(t)$ (p. rys. 1).



Rys. 1. System z sygnałem wejściowym i sygnałem wyjściowym

W systemach minimalizujemy pasożytnicze efekty stosując:

- filtrację
- modulację
- kodowanie

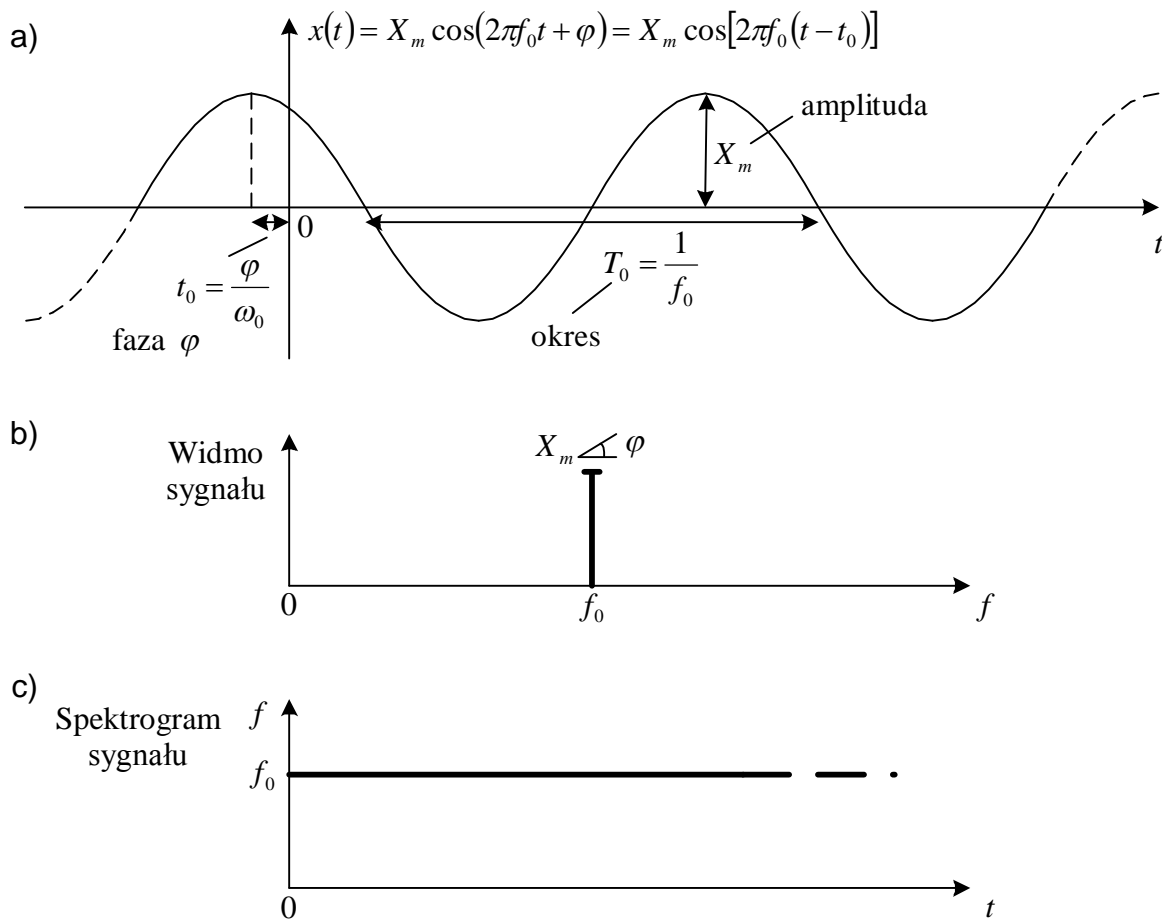
Kodowanie jest tu najskuteczniejszym środkiem, ale może być stosowane tylko dla sygnałów cyfrowych. Dodatkowo sygnały cyfrowe mogą być przetwarzane za pomocą tak doskonałych narzędzi jak procesory sygnałowe, mikroprocesory i komputery. Z tego powodu współcześnie dominują systemy cyfrowe, a nie analogowe. Jeżeli są stosowane systemy analogowe, to raczej ze względów ekonomicznych, a nie technicznych. Na przykład już dawno wycofano by się z telewizyjnego analogowego systemu nadawczego, gdyby nie ogromny koszt niezbędnej w tym przypadku wymiany, czy rozbudowy o dodatkowy modem wszystkich odbiorników telewizyjnych. Najnowsze systemy telekomunikacyjne takie jak telewizja i telefonia satelitarna są systemami cyfrowymi.

Przykład 1. Przykładem sygnału bardzo często występującego w praktyce jest sygnał sinusoidalny (często stosowany jako sygnał testowy)

$$x(t) = X_m \cos(2\pi f_0 t + \varphi), \quad -\infty < t < \infty, \quad T_0 = \frac{1}{f_0}, \quad \omega_0 = 2\pi f_0 \quad (1)$$

Sygnal ten wykreślono w funkcji czasu na rys. 2a (przyrządem pokazującym sygnał w takiej postaci jest oscyloskop). Jak widać jest to przykład sygnału *nieskończonego, ograniczonego, okresowego* (periodycznego). Sygnaly, które nie są okresowe nazywają się sygnałami *aperiodycznymi*. Jak każdy sygnał okresowy tak i ten sygnał ma swój okres, amplitudę (maksymalne odchylenie od zera), fazę (przesunięcie na osi czasu). Moc sygnału okresowego na rezystancji jednostkowej jest zdefiniowana jako wartość średnia całki sygnału podniesionego do kwadratu i w tym przypadku jest to połowa wartości amplitudy podniesionej do kwadratu

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{t_0} |x(t)|^2 dt = \frac{X_m^2}{2} \quad (2)$$



Rys. 2. Sygnal sinusoidalny: a) wykres sygnału w funkcji czasu; b) wykres sygnału w funkcji częstotliwości; c) spektrogram sygnału

Z wykresu sygnału w funkcji czasu bardzo łatwo można odczytać jaka jest amplituda i faza sygnału. Trudno jest natomiast odczytać jaka jest częstotliwość sygnału $f_0 = 1/T_0$ (trzeba najpierw odczytać wartość okresu T_0 , a potem obliczyć jego odwrotność $f_0 = 1/T_0$). Tymczasem znajomość częstotliwości sygnału ma dla nas ogromne znaczenie. Ucho ludzkie o

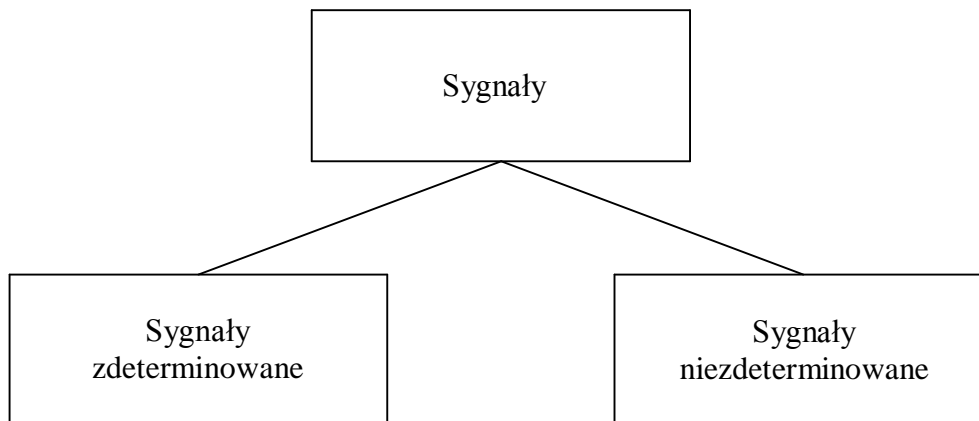
wiele bardziej reaguje na zmianę częstotliwości sygnału niż zmianę amplitudy. Podobnie oko ludzkie o wiele bardziej reaguje na zmianę częstotliwości (kolory) niż na zmianę amplitudy. Ucho ludzkie i oko ludzkie są doskonałymi analizatorami widma sygnału. Dlatego preferuje się wykreślanie sygnału $x(t) = X_m \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ nie w funkcji czasu, ale w funkcji częstotliwości. Taki wykres jest wykresem *widma sygnału* i pokazano go na rys. 2b (przyrządem pokazującym sygnał w takiej postaci jest analizator widma). Ponieważ nasz sygnał sinusoidalny ma stałą częstotliwość $f = f_0 = const$, to widmo ma postać prążka na osi częstotliwości, jest dyskretne. Wszystkie sygnały okresowe mają widma dyskretne, prążkowe. Sygnały aperiodyczne mają widma ciągłe, gęste. Znajomość widma sygnału ma ogromne znaczenie dla inżyniera, mówi o właściwościach sygnału o wiele więcej niż znajomość przebiegu czasowego sygnału.

Interesującym dla inżyniera jest zbadanie jak zmienia się widmo sygnału w funkcji czasu. Wykres zmian widma w funkcji czasu nazywa się *spektrogramem*. W przypadku sygnału sinusoidalnego spektrogram jest taki jak to pokazano na rys. 2c. Ponieważ nasz sygnał sinusoidalny ma stałą częstotliwość, to jego spektrogram jest linią prostą na poziomie częstotliwości f_0 . Gdybyśmy zaczęli zmieniać częstotliwość sinusoidy, to spektrogram przyjąłby postać krzywej obrazującej zmiany częstotliwości sinusoidy w funkcji czasu.

■

2. Klasyfikacja sygnałów

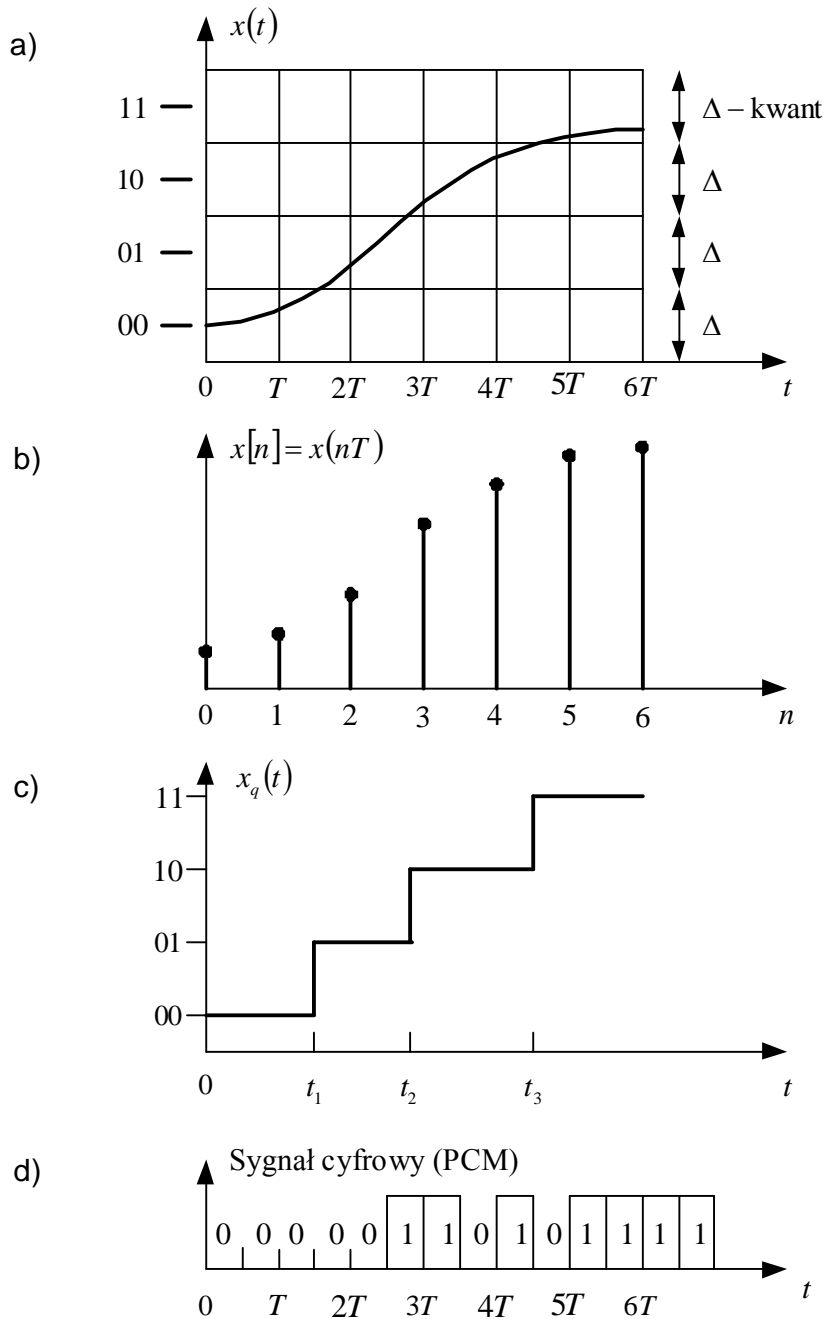
Najogólniej sygnały dzielimy na *zdeterminowane* i *niezdeterminowane* (przypadkowe, stochastyczne), p. rys. 3. Dla sygnału zdeterminowanego jesteśmy w stanie powiedzieć ze 100% pewnością jaka jest jego wartość w każdej chwili czasu. Dla sygnału niezdeterminowanego jesteśmy w stanie tylko powiedzieć jakie jest prawdopodobieństwo, że sygnał przyjmie wartość w zadanym przedziale wartości. Występujące w praktyce sygnały są sygnałami niezdeterminowanymi. Jednak dla uproszczenia rozważań najczęściej będzie dopuszczalne przedstawienie sygnału niezdeterminowanego w przybliżeniu jako sygnału zdeterminowanego. Na przykład w rozważaniach teoretycznych często posługujemy się pojęciem sygnału sinusoidalnego jako sygnału zdeterminowanego, mimo że w rzeczywistości taki sygnał nie istnieje. W rzeczywistości nie istnieje czysty przebieg sinusoidalny, nakładają się nań przypadkowe szумы i zakłócenia.



Rys. 3. Podział sygnałów na zdeterminowane i niezdeterminowane

Istnieją różne klasyfikacje sygnałów w zależności od przyjętych kryteriów. Sklasyfikujemy sygnały według kryterium mówiącego jakiego rodzaju funkcją jest sygnał względem zmiennej z osi odciętych i osi rzędnych. Ze względu na to kryterium sygnały dzielimy na *analogowe*, *dyskretne*, *skwantowane*, *cyfrowe*. Sprecyzujemy pojęcia tych sygnałów.

Sygnał analogowy jest zdefiniowany jako funkcja ciągła argumentu ciągłego $x(t)$ (p. rys. 4a). Sygnały występujące w naturze są najczęściej sygnałami analogowymi (np. sygnały obrazu i dźwięku).



Rys. 4. Sygnały: a) analogowy; b) dyskretny; c) skwantowany; d) cyfrowy

Sygnał dyskretny powstaje z sygnału ciągłego poprzez dyskretyzację, wybór wartości sygnału w dyskretnych chwilach czasu $x[n] = x(nT)$ (rys. 4b). Operacja ta nazywa się próbkowaniem i

polega na „poszatkowaniu” sygnału analogowego w pionie z okresem próbkowania T . Próbkki muszą być pobierane dostatecznie gęsto, aby na ich podstawie można było odtworzyć sygnał analogowy.

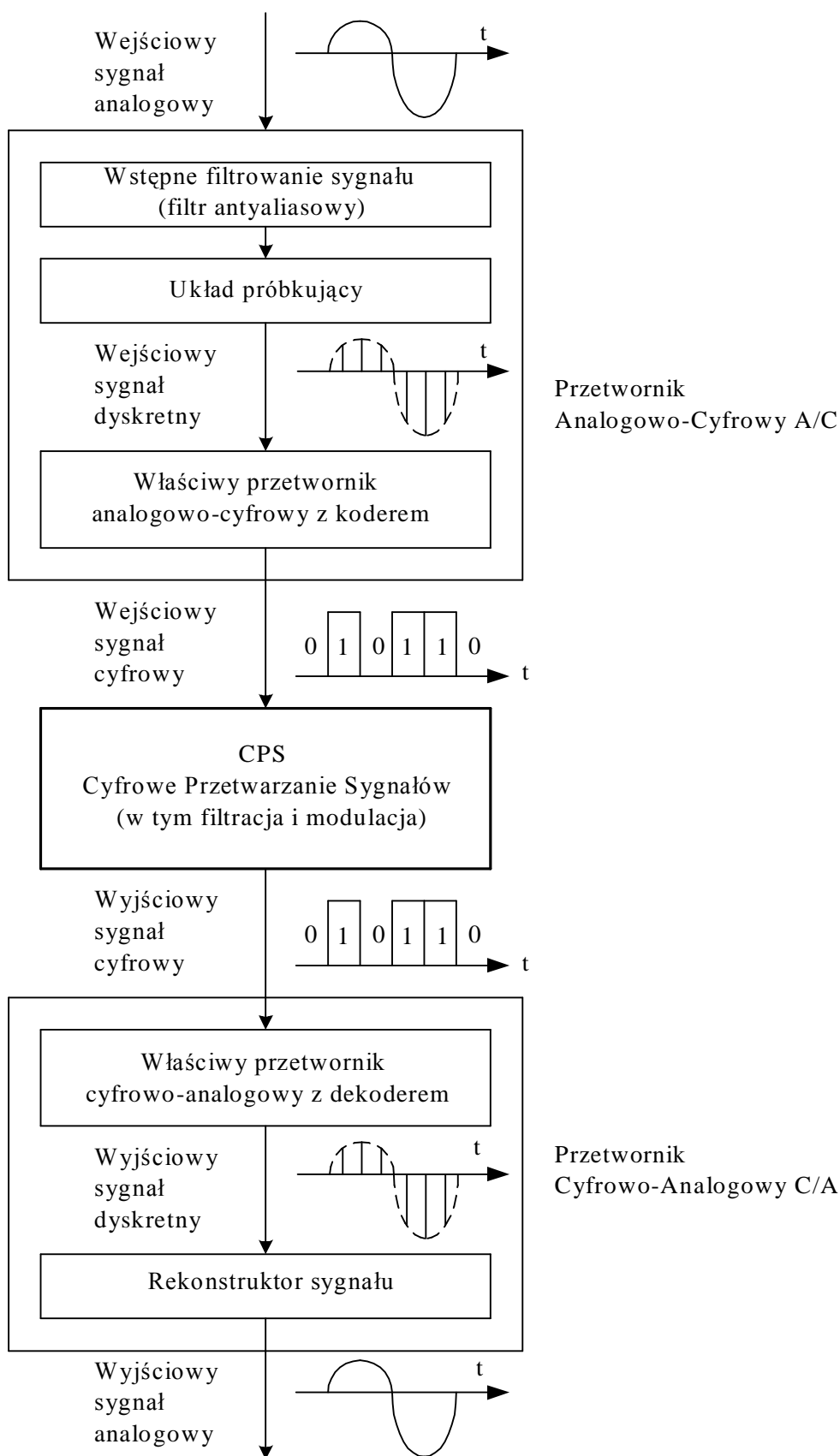
Twierdzenie (twierdzenie Nyquista-Kotielnikowa o próbkowaniu). Jeżeli rzeczywisty sygnał analogowy ma skończone pasmo (widmo mieszczące się w przedziale od 0 do f_{\max} [Hz]), to musi on być próbkowany z częstotliwością próbkowania $f_s = 1/T$ nie mniejszą niż $2f_{\max}$, aby było możliwe jego wierne odtworzenie na podstawie próbek. ■

Częstotliwość próbkowania f_s jest często oznaczana w literaturze polskiej jako f_p .

Sygnał skwantowany jest zdefiniowany jako funkcja dyskretna argumentu ciągłego $x_q(t)$. Powstaje on poprzez „poszatkowanie” sygnału analogowego w poziomie (rys. 4c). Przedział zmienności ograniczonego sygnału analogowego $x(t)$ zostaje podzielony na przedziały kwantowania o jednakowej szerokości Δ . Każdemu przedziałowi kwantowania przypisuje się poziom kwantowania, np. w środku przedziału kwantowania. W przedziale czasu od 0 do t_1 wartość sygnału analogowego na rys. 4 mieści się w pierwszym przedziale kwantowania i przypisuje mu się wartość oznaczoną numerem 00. W przedziale czasu od t_1 do t_2 wartość sygnału analogowego mieści się w drugim przedziale kwantowania i przypisuje mu się wartość oznaczoną numerem 01, itd.

Sygnał cyfrowy powstaje z połączenia dyskretyzacji i kwantowania. Numery poziomów kwantowania zapisuje się w kodzie dwójkowym (binarnym, zero-jedynkowym). Próbkka sygnału o wartości z danego przedziału kwantowania zostaje zapisana w kodzie dwójkowym. Ciąg próbek zostaje zamieniony na ciąg zero-jedynkowy (rys. 4d). Próbki o indeksach 0 i 1 mają wartości wpadające do pierwszego przedziału i zostały zakodowane jako 00, 00. Próbka o indeksie 2 ma wartość wpadającą do drugiego przedziału i została zakodowana jako 01, itd. Jeżeli 0 przedstawimy jako brak impulsu, a 1 przedstawimy jako impuls prostokątny, to tak przedstawiony sygnał cyfrowy nazywa się sygnałem PCM (Pulse Coded Modulation).

Z powyższego wynikają zasady konstruowania systemów cyfrowych. Bardzo ogólny schemat blokowy systemu cyfrowego pokazano na rys. 5. Na wejściu systemu sygnał analogowy jest filtrowany i próbkowany. Następnie próbki sygnału są kodowane i jest formowany wejściowy sygnał cyfrowy. Taki sygnał jest przetwarzany cyfrowo z użyciem bardzo wydajnych, wyspecjalizowanych komputerów, procesorów sygnałowych. Po stronie odbiorczej systemu dokonuje się rekonstrukcji sygnału analogowego z sygnału cyfrowego.



Rys. 5. Schemat blokowy systemu cyfrowego

3. Widma sygnałów

3.1. Szereg Fouriera

Rozwinięcie rzeczywistego sygnału okresowego $x(t) = x(t + T_0)$ w trygonometryczny szereg Fouriera ma następującą postać

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k) \quad (3)$$

gdzie

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) dt \quad (4)$$

jest wartością średnią w okresie T_0 sygnału, oraz dla $k = 1, 2, \dots$ mamy

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) \cos k\omega_0 t dt \quad (5)$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) \sin k\omega_0 t dt \quad (6)$$

Wzór (3) podaje dwie możliwe postacie trygonometrycznego szeregu Fouriera. Ponieważ obowiązuje wzór trygonometryczny

$$a \cos \beta + b \sin \beta = \sqrt{a^2 + b^2} \cos\left(\beta - \arctg \frac{b}{a}\right) \quad (7)$$

to między parametrami obu postaci szeregu trygonometrycznego zachodzą następujące związki

$$C_0 = a_0, \quad \varphi_0 = 0, \quad C_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \varphi_k = -\arctg \frac{b_k}{a_k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (8)$$

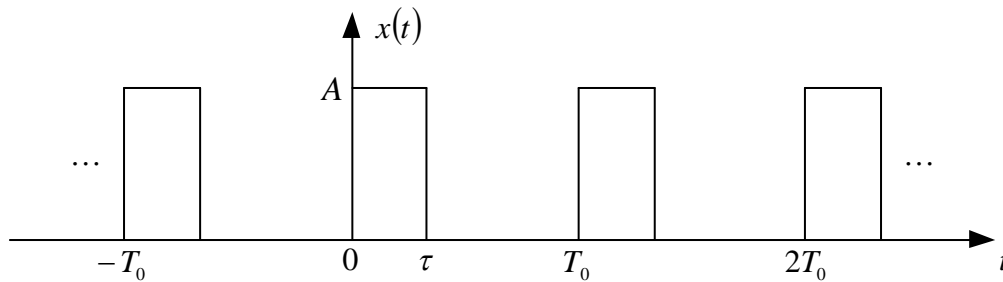
Współczynniki C_k nazywają się *widmem amplitudowym*, a kąty φ_k *widmem fazowym* sygnału okresowego $x(t)$. Sygnał okresowy ma widmo dyskretne, prążkowe. Prążki widma występują na pulsacjach $k\omega_0$ i nazywają się harmonicznymi sygnału. Wartości prążków widma amplitudowego są podawane w takich samych jednostkach jak sygnał, tzn. jeśli sygnał jest sygnałem napięciowym, to wartości prążków są podawane w voltach. Jeśli sygnał jest sygnałem prądowym, to wartości prążków są podawane w amperach. Wartości prążków widma fazowego są podawane w radianach lub stopniach.

Dzięki temu, że zachodzi równość Parsewala, moc sygnału może być obliczona nie tylko w dziedzinie czasu, ale i w dziedzinie częstotliwości

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 = C_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 \quad (9)$$

Podniesione do kwadratu widmo amplitudowe nazywa się *widmem mocy*. Wartość prądka widma mocy jest podawana w watach. Pierwiastek z mocy sygnału na rezystancji jednostkowej jest *wartością skuteczną* sygnału okresowego $X_{sk} = \sqrt{P}$.

Przykład 2. Rozwiemy w szereg Fouriera sygnał z rys. 6 będący nieskończonym ciągiem unipolarnych impulsów prostokątnych. Każdy impuls ma czas trwania τ i amplitudę A . Współczynnik $D = \tau/T_0$ nazywa się współczynnikiem wypełnienia.



Rys. 6. Sygnał okresowy o postaci ciągu impulsów prostokątnych

Obliczamy wartość średnią sygnału

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{\tau} A dt = A \frac{\tau}{T_0} = AD \quad (10)$$

Następnie obliczamy dla $k = 1, 2, \dots$ współczynniki

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cos k\omega_0 t dt = \frac{2A}{T_0} \int_0^{\tau} \cos k\omega_0 t dt = \frac{2A}{T_0} \frac{\sin k\omega_0 t}{k\omega_0} \Big|_0^{\tau} = \frac{A}{\pi k} \sin k\omega_0 \tau \quad (11)$$

oraz współczynniki

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \sin k\omega_0 t dt = \frac{2A}{T_0} \int_0^{\tau} \sin k\omega_0 t dt = -\frac{2A}{T_0} \frac{\cos k\omega_0 t}{k\omega_0} \Big|_0^{\tau} = \frac{A}{\pi k} (1 - \cos k\omega_0 \tau) \quad (12)$$

Sygnał $x(t)$ ma następujące rozwinięcie w trygonometryczny szereg Fouriera

$$x(t) = A \frac{\tau}{T_0} + \frac{A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k} \sin k\omega_0 \tau \cos k\omega_0 t + \frac{1}{k} (1 - \cos k\omega_0 \tau) \sin k\omega_0 t \right] \quad (13)$$

Druga postać trygonometrycznego szeregu Fouriera, to

$$x(t) = A \frac{\tau}{T_0} + 2A \frac{\tau}{T_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left| \sin\left(\frac{k\omega_0\tau}{2}\right) \right|}{\frac{k\omega_0\tau}{2}} \cos\left(k\omega_0 t - \frac{1}{2}k\omega_0\tau\right) \quad (14)$$

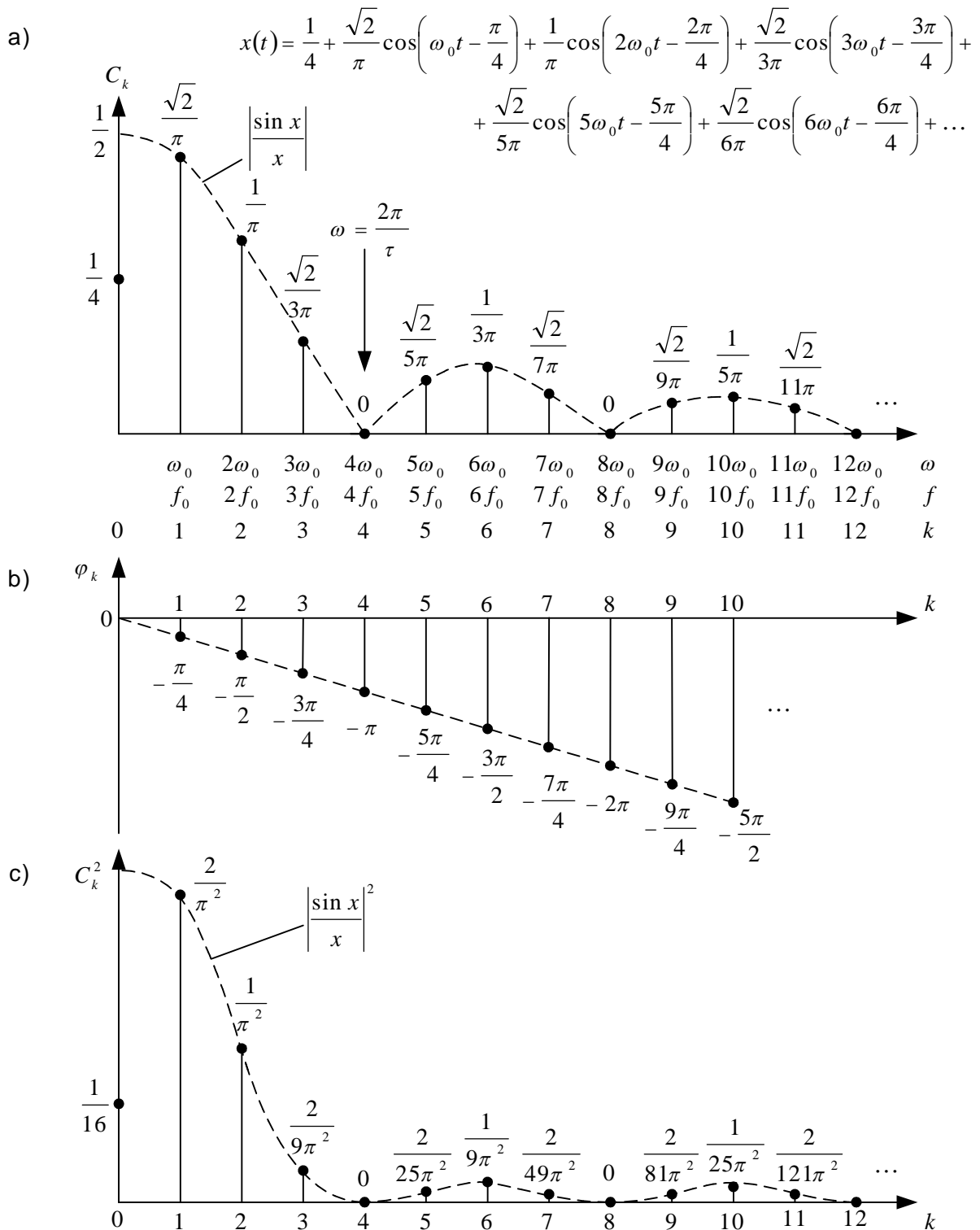
Niech wartości parametrów sygnału będą następujące: $A = 1$, $\tau = 1\text{ s}$, $T_0 = 4\text{ s}$. Sygnał ma następujące wartości średnią i skuteczną

$$X_0 = A \frac{\tau}{T_0} = \frac{1}{4}, \quad X_{sk} = \sqrt{P} = \sqrt{\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt} = \sqrt{A^2 \frac{\tau}{T_0}} = A \sqrt{\frac{\tau}{T_0}} = \frac{1}{2} \quad (15)$$

Widmo sygnału $x(t)$ rozwiniętego w szereg Fouriera

$$x(t) = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left| \sin\left(k \frac{\pi}{4}\right) \right|}{k} \cos\left(k\omega_0 t - k \frac{\pi}{4}\right) \quad (16)$$

zostało pokazane na rys. 7.



Rys. 7. Widmo okresowego ciągu impulsów prostokątnych: a) widmo amplitudowe; b) widmo fazowe; c) widmo mocy

Widmo szeregu trygonometrycznego Fouriera jest widmem jednostronnym. Indeksy k dla tego szeregu są nieujemne. Widmo jest rysowane tylko na dodatniej półosi. Oś odciętych jest opisywana jako: oś pulsacji, oś częstotliwości lub oś indeksów k . Im krótszy jest impuls prostokątny, tym bardziej rozciągnięte jest jego widmo. Ten wniosek jest generalnie słuszny w analizie widmowej i dotyczy też sygnałów o innym kształcie niż impuls prostokątny.

Zawsze „ściśnięciu” sygnału w dziedzinie czasu odpowiada „rozciągnięcie” w dziedzinie częstotliwości.

Widmo mocy sygnału jest podniesionym do kwadratu widmem amplitudowym i zostało ono pokazane na rys. 7c. Moc sygnału może być obliczona z definicji w dziedzinie czasu i równoważnie z równości Parsevala w dziedzinie częstotliwości

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{4}, \quad P = C_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\sin\left(k \frac{\pi}{4}\right)}{k} \right|^2 \quad (17)$$

■

Oprócz trygonometrycznego szeregu Fouriera istnieje wykładniczy szereg Fouriera. Rzeczywisty sygnał okresowy $x(t) = x(t + T_0)$ o okresie $T_0 = 2\pi/\omega_0$ ma następujące rozwinięcie w wykładniczy szereg Fouriera

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k e^{jk\omega_0 t} \quad (18)$$

gdzie

$$D_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (19)$$

są współczynnikami zespolonymi $D_k = |D_k| e^{j\varphi_k}$ spełniającymi zależność $D_{-k} = D_k^*$. Widmo D_k jest widmem dwustronnym, gdyż indeksy k rozciągają się od minus do plus nieskończoności. Widmo amplitudowe jest funkcją parzystą, a widmo fazowe funkcją nieparzystą dla sygnału rzeczywistego.

Po przekształceniu zależności (18) do postaci

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k e^{jk\omega_0 t} = D_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (D_k e^{jk\omega_0 t} + D_k^* e^{-jk\omega_0 t}) = D_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|D_k| \cos(k\omega_0 t + \varphi_k) \quad (20)$$

widać, że między współczynnikami trygonometrycznego i wykładniczego szeregu Fouriera zachodzą następujące związki

$$C_0 = D_0, \quad C_k = 2|D_k|, \quad \varphi_k = \arg D_k \quad (21)$$

Równość Parsevala przyjmuje następującą postać

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = D_0^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |D_k|^2 \quad (22)$$

Przykład 3. Wyznamy wykładniczy szereg Fouriera dla sygnału sinusoidalnego wyprostowanego jednopółkowo (rys. 8a).

Obliczamy współczynniki rozwinięcia w szereg

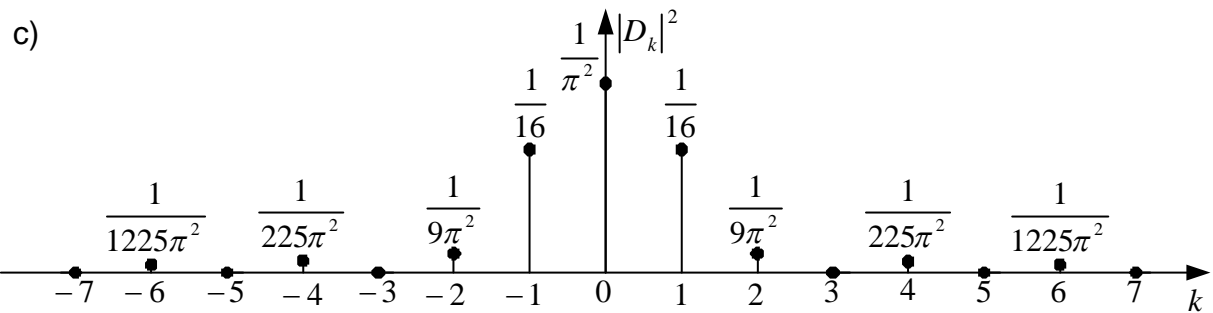
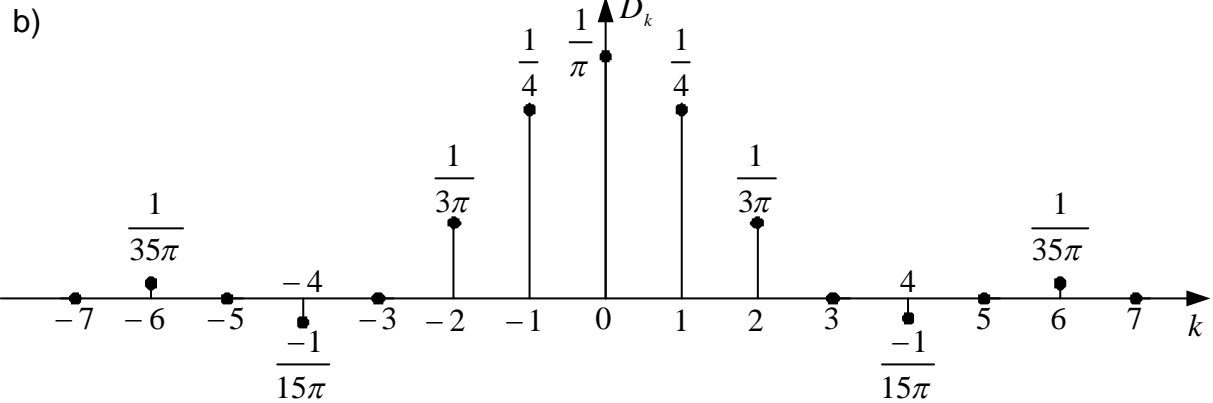
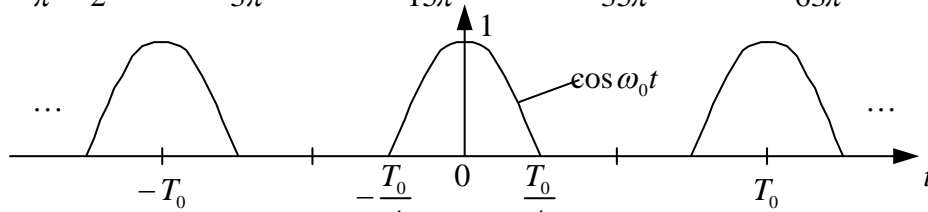
$$\begin{aligned}
 D_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} (\cos \omega_0 t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{2T_0} \int_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} (e^{-j(k-1)\omega_0 t} + e^{-j(k+1)\omega_0 t}) dt = \\
 &= \left[\frac{e^{-j(k-1)\omega_0 t}}{-j4\pi(k-1)} + \frac{e^{-j(k+1)\omega_0 t}}{-j4\pi(k+1)} \right]_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} = \frac{e^{-j(k-1)\frac{\pi}{2}} - e^{j(k-1)\frac{\pi}{2}}}{-j4\pi(k-1)} + \frac{e^{-j(k+1)\frac{\pi}{2}} - e^{j(k+1)\frac{\pi}{2}}}{-j4\pi(k+1)} = \\
 &= \frac{\sin(k-1)\frac{\pi}{2}}{2\pi(k-1)} + \frac{\sin(k+1)\frac{\pi}{2}}{2\pi(k+1)} = \frac{-\cos k\frac{\pi}{2}}{2\pi(k-1)} + \frac{\cos k\frac{\pi}{2}}{2\pi(k+1)} = \frac{\cos k\frac{\pi}{2}}{\pi(1-k^2)}
 \end{aligned} \tag{23}$$

Ostatecznie poszukiwany szereg, to

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\cos k\frac{\pi}{2}}{\pi(1-k^2)} e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\cos k\frac{\pi}{2}}{\pi(1-k^2)} \cos k\omega_0 t \tag{24}$$

Oprócz wykładniczej postaci szeregu, podano też trygonometryczną postać szeregu.

a)
$$x(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos \omega_0 t + \frac{2}{3\pi} \cos 2\omega_0 t - \frac{2}{15\pi} \cos 4\omega_0 t + \frac{2}{35\pi} \cos 6\omega_0 t - \frac{2}{63\pi} \cos 8\omega_0 t + \dots$$



Rys. 8. Analiza widmowa: a) sygnał; b) widmo sygnału; c) widmo mocy

Widmo sygnału pokazano na rys. 8b. Nie było potrzeby rysowania oddzielnie widma fazowego, gdyż prążki mają fazę tylko albo równą zero, albo $\pm\pi$ i prążki o fazie $\pm\pi$ pokazano jako prążki o ujemnej wartości. Widmo jest widmem dwustronnym, prążki widma występują na dodatniej i ujemnej półosi, gdyż indeksy w wykładniczym szeregu Fouriera są dodatnie i ujemne. Podobnie widmo mocy jest widmem dwustronnym (rys. 8c). Moc sygnału obliczona w dziedzinie czasu

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} (\cos \omega_0 t)^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\omega_0 t \right) dt = \frac{1}{4} \quad (25)$$

równa się mocy sygnału obliczonej w dziedzinie częstotliwości

$$P = D_0^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |D_k|^2 = \frac{1}{\pi^2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\cos k \frac{\pi}{2}}{\pi(1-k^2)} \right]^2 \quad (26)$$

■

3.2. Transformata Fouriera

Proste przekształcenie Fouriera jest zdefiniowane następującym wzorem

$$X(\omega) = \mathbf{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (27)$$

gdzie $X(\omega)$ nazywa się transformatą Fouriera lub widmem sygnału $x(t)$. Moduł widma $A(\omega) = |X(\omega)|$ nazywa się *widmem amplitudowym* sygnału, argument widma $\varphi(\omega) = \arg X(\omega)$ nazywa się *widmem fazowym* sygnału, a minus pierwsza pochodna argumentu $\tau_g(\omega) = -d\varphi(\omega)/d\omega$ nazywa się *widmem opóźnienia grupowego*. Kwadrat modułu widma $|X(\omega)|^2$ nazywa się *widmem energetycznym* sygnału.

Odwrotne przekształcenie Fouriera jest zdefiniowane następującym wzorem

$$x(t) = \mathbf{F}^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (28)$$

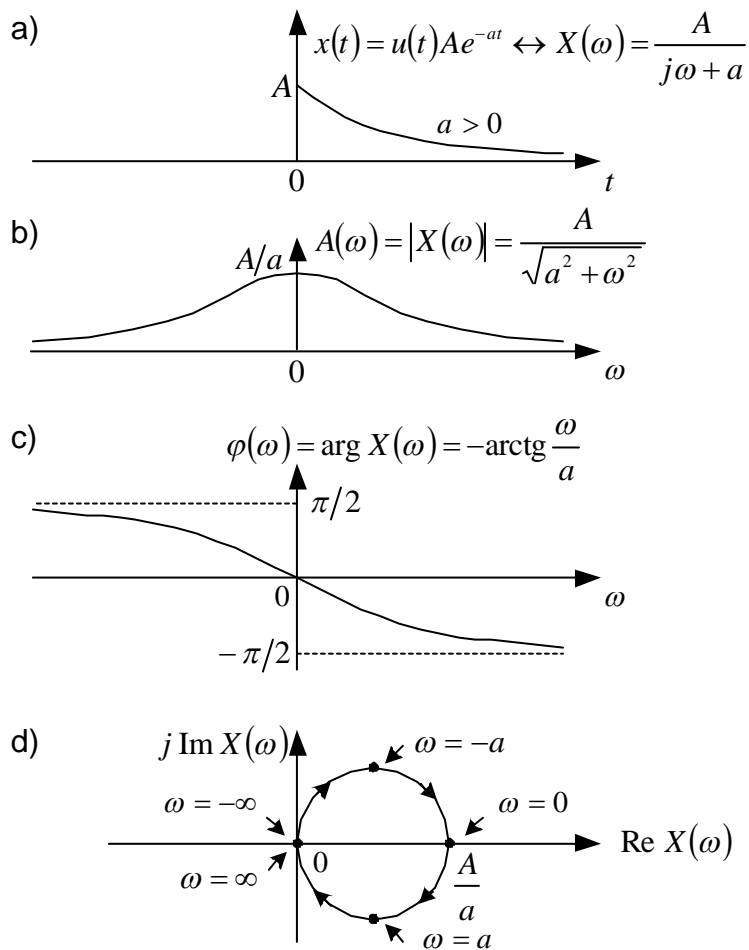
Przykład 4. Obliczymy i narysujemy widmo sygnału wykładniczego z rys. 9a. Obliczamy widmo sygnału z zależności definicyjnej

$$X(\omega) = \int_0^{\infty} A e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \frac{-A}{j\omega + a} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{j\omega + a} = \frac{A}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} e^{-j \arctg \frac{\omega}{a}} \quad (29)$$

Widmo amplitudowe i fazowe sygnału wykreślono odpowiednio na rys. 9b i c. Ponieważ widmo sygnału jest funkcją zespoloną

$$X(\omega) = \frac{Aa}{a^2 + \omega^2} - j \frac{A\omega}{a^2 + \omega^2} \quad (30)$$

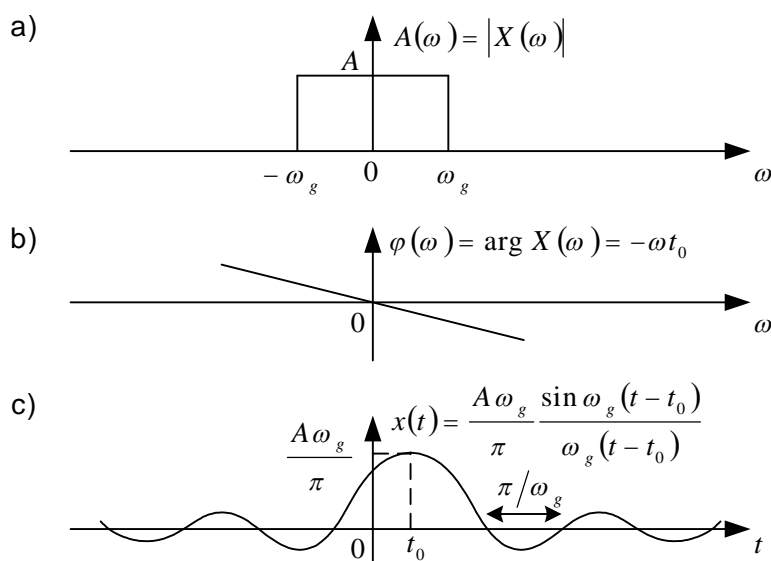
to może ono być wykreślone na płaszczyźnie zmiennej zespolonej w postaci hodografu (rys. 9d).



Rys. 9. Sygnał wykładniczy i jego widmo: a) sygnał; b) widmo amplitudowe; c) widmo fazowe; d) hodograf



Przykład 5. Znamy widmo amplitudowe oraz widmo fazowe sygnału i są one takie, jak to pokazano na rys. 10a i b. Obliczymy jaki jest sygnał, któremu odpowiada to widmo.



Rys. 10. Widmo i odpowiadający mu sygnał: a) widmo amplitudowe; b) widmo fazowe; c) sygnał

Sygnal obliczamy z zależności definiującej odwrotne przekształcenie Fouriera

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_g}^{\omega_g} A e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega = \frac{A}{2\pi j(t-t_0)} e^{j\omega(t-t_0)} \Big|_{-\omega_g}^{\omega_g} = \\
 &= \frac{A\omega_g}{\pi} \frac{e^{j\omega_g(t-t_0)} - e^{-j\omega_g(t-t_0)}}{2j\omega_g(t-t_0)} = \frac{A\omega_g}{\pi} \frac{\sin \omega_g(t-t_0)}{\omega_g(t-t_0)}
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

Sygnal $x(t)$ jest sygnałem nieskończonym, nieprzyczynowym, mającym postać funkcji $\frac{\sin x}{x}$ opóźnionej o czas t_0 .



Ważniejsze pary transformacji Fouriera zestawiono w tabeli 1.

Tabela 1. Pary transformacji Fouriera

$x(t)$	$X(\omega)$
$e^{-at}u(t), \quad a > 0$	$\frac{1}{a + j\omega}$
$e^{at}u(-t), \quad a > 0$	$\frac{1}{a - j\omega}$
$e^{-a t }, \quad a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$t^n e^{-at}u(t), \quad a > 0$	$\frac{n!}{(a + j\omega)^{n+1}}$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\delta(\omega)$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
$u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$	$\frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\tau \frac{\omega\tau}{2}}$
$\frac{\omega_g}{\pi} \frac{\sin \omega_g t}{\omega_g t}$	$u(\omega + \omega_g) - u(\omega - \omega_g)$
$e^{-at^2}, \quad a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$	$\Delta_{\omega_0}(\omega) = \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$\cos \omega_0 t$	$\pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$
$\sin \omega_0 t$	$-j\pi\delta(\omega - \omega_0) + j\pi\delta(\omega + \omega_0)$
$u(t)\cos \omega_0 t$	$\frac{\pi}{2}\delta(\omega - \omega_0) + \frac{\pi}{2}\delta(\omega + \omega_0) + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$
$u(t)\sin \omega_0 t$	$-j\frac{\pi}{2}\delta(\omega - \omega_0) + j\frac{\pi}{2}\delta(\omega + \omega_0) + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$
$u(t)e^{-at} \cos \omega_0 t, a > 0$	$\frac{a + j\omega}{\omega_0^2 + (a + j\omega)^2}$
$u(t)e^{-at} \sin \omega_0 t, a > 0$	$\frac{\omega_0}{\omega_0^2 + (a + j\omega)^2}$

4. Spektrogramy sygnałów

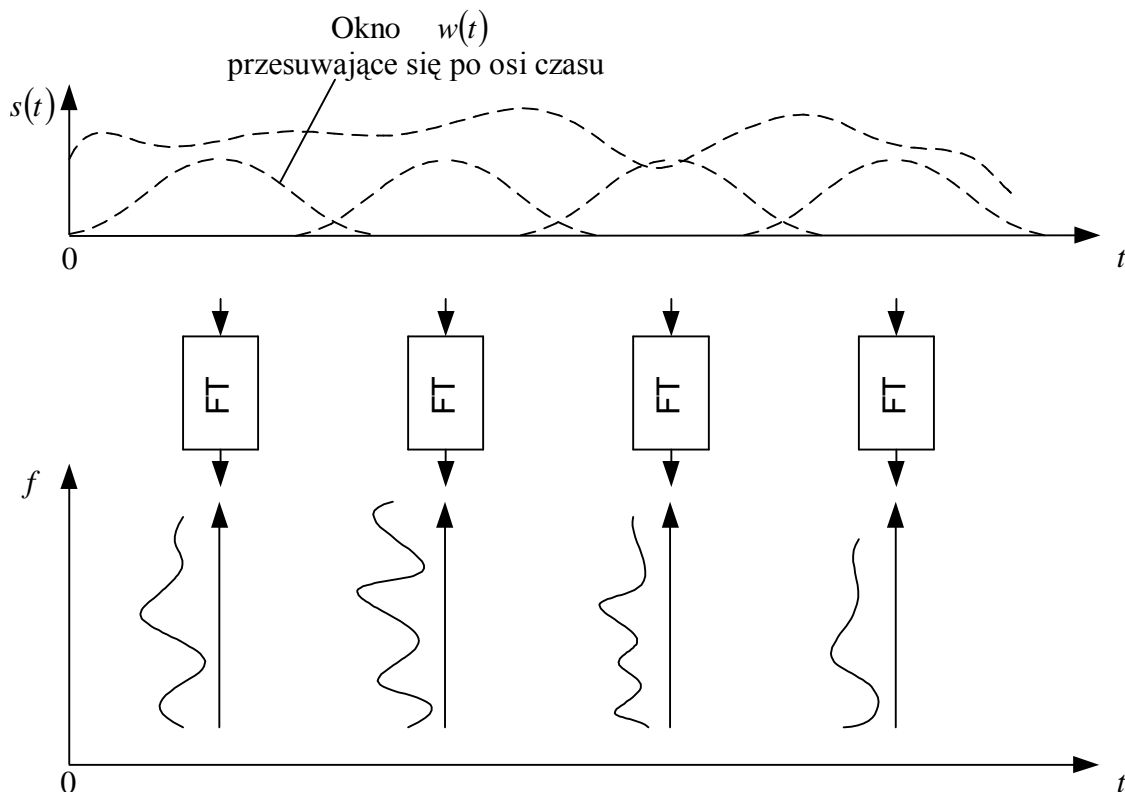
Przekształcenie Fouriera pozwala wyznaczyć widmo $S(\omega)$ sygnału $s(t)$. Jest to widmo sygnału uśrednione w całym przedziale czasu istnienia sygnału. Takie widmo nie oddaje ważnej cechy sygnałów jaką jest zmiana składowych częstotliwościowych sygnału w funkcji czasu. Na przykład w sygnale mowy składowe częstotliwościowe zmieniają się w miarę wypowiedzania kolejnych głosek, a każda głoska ma inne widmo. Podobnie sygnał muzyczny składa się z kolejnych fraz o różnym widmie.

Przekształceniem całkowym sygnału oddającym zmienność widma w funkcji czasu jest krótkoczasowe przekształcenie Fouriera (w skrócie STFT z ang. Short-Time Fourier Transform). Sygnał oryginalny zostaje pomnożony przez przesuwające się w funkcji czasu okno (p. rys. 11)

$$x(\tau, t) = s(\tau)w(\tau - t) \tag{32}$$

i jest obliczane widmo wyciętego przez okno fragmentu sygnału, czyli jest obliczane krótkoczasowe przekształcenie Fouriera

$$X(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau, t)e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)w(\tau - t)e^{-j\omega\tau} d\tau \tag{33}$$



Rys. 11. Zmiany widma sygnału w funkcji czasu

Widmo krótkoczasowe $X(\omega, t)$ jest widmem tego fragmentu sygnału oryginalnego, który został wycięty przez okno przyłożone w chwili czasu t . Odwrotne krótkoczasowe przekształcenie Fouriera pozwala powrócić do dziedziny czasu

$$x(\tau, t) = s(\tau)w(\tau - t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega, t)e^{j\omega\tau} d\omega \quad (34)$$

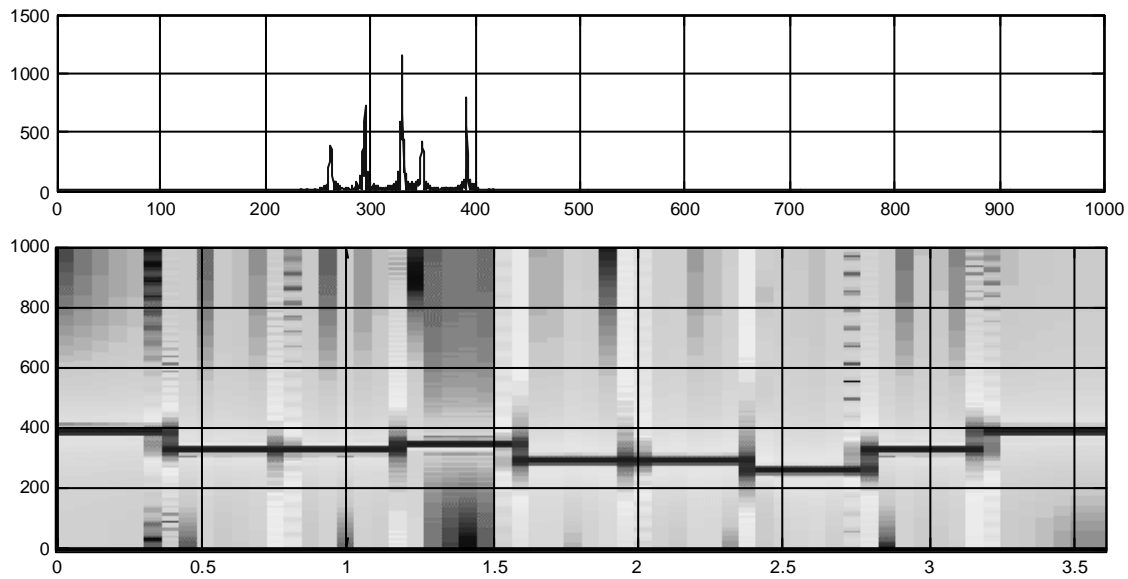
Wyniki obliczeń widma krótkoczasowego przedstawia się w postaci spektrogramu. *Spektrogramem* nazywamy graficzne przedstawienie widma gęstości energii

$$|X(\omega, t)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)w(\tau - t)e^{-j\omega\tau} d\tau \right|^2 \quad (35)$$

Jest to funkcja dwóch zmiennych i powinna być przedstawiona w trzywymiarowym układzie współrzędnych. Wystarczy jednak sporządzić wykres na płaszczyźnie, w dwuwymiarowym układzie współrzędnych, gdzie oś odciętych jest osią czasu, a oś rzędnych jest osią częstotliwości. Trzeci wymiar wyraża się poziomem szarości lub kolorem, podobnie jak na mapach geograficznych, gdzie przejście od nizin do gór jest przedstawiane jako zmiana koloru od zielonego do brązowego.

Przykład 6. Na rys. 12 pokazano widmo amplitudowe i spektrogram pewnego sygnału muzycznego. Z widma amplitudowego można odczytać częstotliwości tonów, z których składa się utwór muzyczny. Są to tony o częstotliwościach 262 Hz, 294 Hz, 330 Hz, 349 Hz, 392 Hz, czyli tony odpowiadające nutom do, re, mi, fa, sol. Nie wiadomo jednak ile

razy zagrano każdą z nut i w jakiej kolejności. O tych właściwościach sygnału można dowiedzieć się obserwując spektrogram.



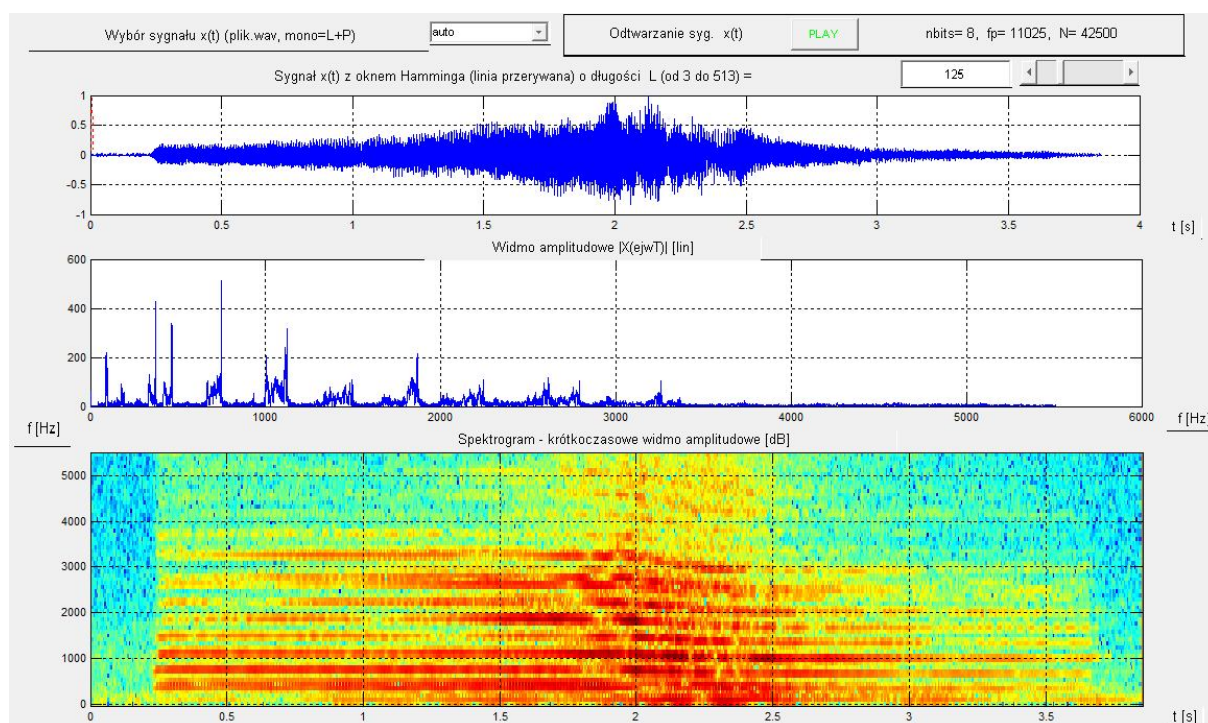
Rys. 12. Widmo amplitudowe i spektrogram sygnału muzycznego

Spektrogram sporządzono przy użyciu okna Hamminga o długości 0,12 s. Utwór trwa 3,6 s i zagrano w nim 9 nut: sol, mi, mi, fa, re, re, do, mi, sol. Osoba znająca zapis nutowy rozpozna, że zagrano melodię utworu „włazł kotek na płotek i mruga”.

Spektrogramy można wykorzystywać w diagnostyce maszyn. Na przykład spektrogram odgłosu zużytego silnika odrzutowego będzie różnił się od spektrogramu dla silnika nowego. Porównując oba spektrogramy można podjąć decyzję, czy jest już potrzebny remont zużytego silnika.



Przykład 7. Plik auto.wav zawiera próbki sygnału przejeżdżającego samochodu z włączonym klaksonem (częstotliwość próbkowania $f_p = 11025$ Hz).



Rys. 13. Analiza sygnału przejeżdżającego auta z włączonym klaksonem

Sygnał klaksonu jest sygnałem okresowym o częstotliwości podstawowej równej 400Hz w warunkach, gdy samochód zbliża się do obserwatora. Na skutek zjawiska Dopplera częstotliwość ta maleje w warunkach, gdy samochód oddala się od obserwatora. Obserwator słyszy sygnał o częstotliwości pozornej $f_{pozorna}$ różniącej się od częstotliwości oryginalnej f , przy czym zmiany częstotliwości opisuje następujący wzór

$$f_{pozorna} = f \frac{v}{v \mp v_s} \quad (36)$$

gdzie v_s jest prędkością samochodu, zaś $v = 333$ m/s jest prędkością dźwięku w powietrzu .

Na spektrogramie można zaobserwować jak zmalała częstotliwość klaksonu po minięciu obserwatora. Ósma harmoniczna częstotliwości klaksonu samochodu zbliżającego się miała wartość $f_1 = 3200$ Hz i częstotliwość tej harmonicznej zmalała do wartości $f_2 = 2900$ Hz z chwilą, gdy samochód zaczął oddalać się od obserwatora. Oznacza to, że przy prędkości rozchodzenia się dźwięku w powietrzu równej 333 m/s, prędkość samochodu miała następującą wartość

$$v_s = v \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2} = 333 \frac{3200 - 2900}{3200 + 2900} = 16,4 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 59 \frac{\text{km}}{\text{godz}} \quad (37)$$

Samochód przejechał nie przekraczając prędkości 60 km/godz .

■